# Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

K. Hensel und H. Hasse

Band 171

Heft 4

Ausgegeben den 31. Juli 1934

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

1934

# Band 171. Heft 4.

## Inhaltsverzeichnis.


| | Seite |
|---|---|
| **Köthe, G. und O. Toeplitz,** Lineare Räume mit unendlichvielen Koordinaten und Ringe unendlicher Matrizen . . . . . | 193 |
| **Weber, Anton,** Isomorphismus maximaler Matrizenringe . . . . . | 227 |
| **Epstein, P.,** Zur Auflösbarkeit der Gleichung $x^2 - Dy^2 = -1$ . . . . . | 243 |


### *An unsere Mitarbeiter!*

*Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgendeinem Grunde Text-Änderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.*

*Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.*

*Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.*

*Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 75 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.*

**Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion ausschließlich unter der Adresse:**
**An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik**
**Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg-Lahn, Behringweg 7.**


**Druck von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 10**
**Printed in Germany**

# Lineare Räume mit unendlichvielen Koordinaten und Ringe unendlicher Matrizen.

Von *G. Köthe* in Münster und *O. Toeplitz* in Bonn.

## Inhaltsübersicht.

Kapitel I. Lineare Räume. Seite

§ 1. Lineare Koordinatenräume ... 196
§ 2. Der duale Raum. Vollkommene Räume ... 197
§ 3. Konvergente Folgen von Stellen. Vollständige Räume ... 197
§ 4. Relative Konvergenz ... 200
§ 5. Starke Konvergenz ... 201

Kapitel II. Matrizenringe.

§ 6. Das zu einem Raum $\lambda$ gehörige Matrizensystem $\Sigma(\lambda)$. Matrizenringe ... 204
§ 7. Verschärfungen. Der Bilinearformensatz ... 207
§ 8. Homöomorphe Räume ... 208
§ 9. Maximale Matrizenringe ... 210
§ 10. Vollständige Matrizenringe ... 213
§ 11. Starke Konvergenz von Matrizenfolgen ... 214

Kapitel III. Spezielle Räume. Erweiterungen.

§ 12. Der Hilbertsche Raum $\sigma_2$ ... 215
§ 13. Der Raum $\sigma_\infty$ der Stellen mit beschränkten Koordinaten ... 218
§ 14. Symmetrische Räume ... 219
§ 15. Konvergenzfreie Räume ... 220
§ 16. Andere Konvergenzbegriffe an Stelle der absoluten Konvergenz ... 222

Hilberts Theorie der quadratischen und bilinearen Formen von unendlichvielen Veränderlichen [1]) handelt von der Gesamtheit der Stellen $\mathfrak{x}$ mit unendlichvielen Koordinaten $x_1, x_2, \ldots$, für die $|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots$ konvergiert; im folgenden wird dieser Raum als $\sigma_2$ bezeichnet werden. Hilbert betrachtet die „beschränkten" linearen Transformationen dieses Raumes in sich, d. h. diejenigen linearen Transformationen

$$y_p = \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} x_q , \tag{1}$$

bei denen für jedes $\mathfrak{x}$ aus $\sigma_2$ die Summen rechterhand alle konvergieren, und die jede Kugel $\Sigma|x_p|^2 \leqq r^2$ in einen Teil einer Kugel $\Sigma|y_p|^2 \leqq s^2$ überführen. Als Hilfsmittel für seine Theorie hat Hilbert unter dem Namen der „Faltungssätze" den Kalkül mit diesen beschränkten Transformationen aufgestellt, der dem Kalkül mit linearen Transformationen von $n$ Veränderlichen analog ist. Wie in der Algebra kann man auch hier statt von den linearen Transformationen von den (unendlichen) Matrizen reden, die von ihren

[1]) Gött. Nachr. 1906, Math.-phys. Kl. p. 157—227 = Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Leipzig 1912/1924.

Koeffizienten gebildet werden; die Hilbertschen Faltungssätze besagen dann, daß die „beschränkten Matrizen" einen Ring bilden.

E. Hellinger und O. Toeplitz [2]) haben sodann die Gesamtheit $\Sigma(\sigma_2)$ aller derjenigen linearen Transformationen (Matrizen) betrachtet, bei denen für jede Stelle $\mathfrak{x}$ aus $\sigma_2$ die Summen (1) alle konvergieren und die transformierte Stelle $\mathfrak{y}$ wieder zu $\sigma_2$ gehört. Sie zeigen, daß $\Sigma(\sigma_2)$ mit dem Hilbertschen System der beschränkten Matrizen identisch ist und ferner, daß es „maximal" ist, d. h. nicht ein echter Teil eines anderen Systems von unendlichvielen Matrizen, bei dem der Kalkül gilt. Sie bemerken endlich, daß das Hilbertsche System in seiner Art nicht einzig ist; sie betrachten nämlich anstatt $\sigma_2$ den Raum $\omega$ aller Stellen $\mathfrak{x}$ mit beliebigen Koordinaten $x_1, x_2, \ldots$ und zeigen, daß die „zeilenfiniten" linearen Transformationen, d. h. diejenigen, deren Matrix in jeder Zeile nur endlichviele Nichtnullen enthält, und nur diese $\omega$ in sich transformieren, daß also das System der zeilenfiniten Matrizen mit $\Sigma(\omega)$ übereinstimmt. Auch dieses ist maximal, aber weder in $\Sigma(\sigma_2)$ enthalten, noch enthält es dieses. Ähnlich ist das System der „spaltenfiniten" Matrizen identisch mit dem System $\Sigma(\varphi)$ aller Transformationen, die den Raum $\varphi$ aller Stellen $\mathfrak{x}$, von deren Koordinaten nur endlichviele von 0 verschieden sind, in sich transformieren.

Die *Theorie der linearen Mittelbildungen* hat dann den Anlaß gegeben, einen weiteren linearen Raum und seine linearen Transformationen zu betrachten. O. Toeplitz [3]) bemerkte, daß man die vielerlei bekannten Mittelbildungen, arithmetische, Cesàrosche, Höldersche Mittel usw., unter einen Begriff zusammenfassen und einfache nicht nur hinreichende sondern auch *notwendige* Bedingungen aufstellen kann, damit die Folge (1) stets konvergiert, wenn die Folge $x_q$ konvergiert. Der Kern dieses Satzes, der sich in der Analysis als recht handlich erwiesen hat [4]), kann nun so formuliert werden: sei $\sigma_\infty$ der Raum aller Stellen $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \ldots)$, deren Koordinaten beschränkt sind, so wird dieser genau von denjenigen Transformationen in sich übergeführt, deren Koeffizientenmatrix „zeilenabsolut" ist, d. h. bei denen alle Summen $\sum_q |a_{pq}|$ konvergieren und unter einer von $p$ unabhängigen Schranke bleiben. Auch dies besagt, daß ein gewisses System unendlicher Matrizen $\Sigma(\sigma_\infty)$ einen Ring bildet und maximal ist, und die Theorie der Mittelbildungen und ihre Fülle von Einzelrechnungen war damit in die Theorie der zeilenabsoluten Matrizen eingeordnet.

Die vorliegende Arbeit setzt sich das Ziel, diese Untersuchungen des $\sigma_2$, des $\omega$, $\varphi$ und des $\sigma_\infty$ und der zu diesen Räumen gehörigen maximalen Matrizensysteme zu einer einzigen alles zusammenfassenden Theorie zu vereinigen. Die Schwierigkeit dieser Absicht lag zutage, nachdem E. Hagemann nach dem Vorbild eines von E. Hellinger zu anderem Zwecke gebildeten Beispiels einen linearen Koordinatenraum angegeben hatte, dessen lineare Transformationen in sich selbst *keinen* Ring bilden (§ 6) und nachdem G. Köthe ein Beispiel eines maximalen Matrizenringes gegeben hatte, der nicht als System $\Sigma(\lambda)$ der linearen Transformationen eines linearen Koordinatenraumes $\lambda$ in sich aufgefaßt werden kann (§ 9).

Die Überwindung dieser Schwierigkeiten gelang durch folgende Begriffsbildungen. Ist $\lambda$ irgendein linearer Koordinatenraum, d. h. eine Teilmenge von $\omega$ mit den formalen Linearitätseigenschaften, so verstehen wir unter seinem *dualen* Raum $\lambda^*$ die Menge der Stellen $\mathfrak{u} = (u_1, u_2, \ldots)$, für die $\sum_n u_n x_n$ stets *absolut* konvergiert, was auch $\mathfrak{x}$ für eine

---

[2]) Gött. Nachr. 1906, Math.-phys. Kl., p. 351—355 und Math. Ann. **69**, 1910, p. 289—330.

[3]) Prace Mat.-Fiz. **22**, 1911, p. 113—119.

[4]) Vgl. z. B. K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 3. Aufl. Berlin 1931, p. 75.

Stelle aus $\lambda$ ist. Ist der duale Raum des dualen Raumes mit $\lambda$ identisch, so nennen wir $\lambda$ *vollkommen*. Wir betrachten ferner diejenigen linearen Transformationen (1), bei denen für alle Stellen $\mathfrak{x}$ aus $\lambda$ die unendlichen Summen rechterhand sämtlich *absolut* konvergieren und die transformierte Stelle $\mathfrak{y} = (y_1, y_2, \ldots)$ wieder eine Stelle aus $\lambda$ ist; das System aller dieser Transformationen heiße $\Sigma(\lambda)$.

Wesentlich ist, daß wir in diesen Definitionen statt „Konvergenz" überall „absolute Konvergenz" gefordert haben. Bei $\sigma_2$, $\omega$, $\sigma_\infty$ sind die betreffenden Summen, wenn sie konvergieren, von selbst absolut konvergent; aber dies gilt nicht bei jedem linearen Koordinatenraum; und gerade die Voraussetzung *absoluter* Konvergenz macht die folgenden Resultate möglich, von denen bei gewöhnlicher Konvergenz nur ein Bruchteil bestehen bleibt (§ 16):

> Ist $\lambda$ vollkommen, so ist $\Sigma(\lambda)$ ein Ring (§§ 6, 7), und zwar ein maximaler Matrizenring (§ 9). Umgekehrt werden zwei ganz verschiedene Bedingungen aufgestellt, unter denen ein maximaler Matrizenring auf diese Weise zustandekommt (§§ 9 und 10).

Indem dann für $\sigma_2$ (§ 12), $\omega$ (§ 15), $\sigma_\infty$ (§ 13) der sehr einfache Nachweis erbracht wird, daß diese Räume vollkommen sind, wird damit der Beweis der „Faltungssätze" und der Maximalität für alle diese Räume neu erbracht; und zwar ist dieser neue Beweis nicht nur für alle diese Räume mit einem Schlage geleistet, sondern er ist auch prinzipiell einfacher als alle früheren Einzelbeweise (vgl. die kleingedruckte Bemerkung im Anschluß an § 12, Satz 6).

Herr F. Hausdorff und kurz darauf auch Herr St. Banach haben eine Reihe von Untersuchungen verwandter Tendenz von F. Riesz, H. Hahn, E. Helly, I. Schauder mit eigenen Untersuchungen zu einer geschlossenen Theorie zusammengefaßt, die sich ein von dem unsrigen wesentlich verschiedenes Ziel setzt [5]). Bei Hausdorff und Banach wird der lineare Raum $\lambda$ abstrakt durch Linearitätsaxiome definiert (vgl. § 1) — insoweit sind unsere Koordinatenräume als spezielle Fälle darin enthalten —, und dazu wird, ebenfalls abstrakt durch Axiome, in dem Raum eine Metrik aufgestellt, womit ein Begriff des Limes und der Stetigkeit gegeben sind. Es werden sodann die linearen stetigen Funktionen des Raumes als Elemente seines „konjugierten" Raumes betrachtet; speziell für $\sigma_\infty$ wird gezeigt, daß sein konjugierter Raum nicht identisch ist mit dem oben definierten dualen Raum $\sigma_\infty^*$; bei den Koordinatenräumen braucht also dualer und konjugierter Raum nicht übereinzustimmen. Im Gefolge davon sind also auch die abstrakten linearen, stetigen Transformationen von $\lambda$ in sich nicht mit unserem System $\Sigma(\lambda)$ identisch; daß das System *dieser* abstrakten linearen stetigen Transformationen einen Ring bildet, ist kein Problem, sondern versteht sich von selbst. Nur kann daraus für unser Theorie nicht gefolgert werden.

Auch unsere Arbeit stellt sich einen Begriff der Konvergenz und der starken Konvergenz von Folgen von Stellen $\mathfrak{x}^{(n)}$ des Raumes $\lambda$ her und bedarf ihrer als Haupthilfsmittel. Sie gewinnt sie aber ohne Benutzung einer Metrik (§§ 3, 5) und damit auch für die „konvergenzfreien" Räume (wie z. B. $\omega$, $\varphi$ und den halbfiniten Raum, § 15), die Hausdorff nicht in seine Untersuchungen einbezogen hat [6]).

---

[5]) Journ. f. Math. **167** (Henselfestband), 1931, p. 294—311; St. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warschau 1932.

[6]) Präziser lautet das Resultat, das Herr K. Eggerath in seiner Staatsexamensarbeit mit den Hausdorffschen Mitteln beweist, daß es in $\varphi$ unmögjich ist, eine lineare Metrik zu finden, bei der $\varphi$ im Sinne von Hausdorff vollständig wird.

Dieser Limesbegriff erlaubt es, die *Homöomorphie* zweier Räume als eineindeutige, lineare, umkehrbar-stetige Beziehung zu definieren und die Frage nach allen Räumen zu stellen, die einem gegebenen vollkommenen Raum homöomorph sind. Auch hier ergeben sich Resultate, die in der Hausdorff-Banachschen Theorie kein eigentliches Gegenstück besitzen: $\omega$ und $\varphi$ sind nur sich selbst homöomorph (§ 8), und sie sind die einzigen vollkommenen Räume, von denen das gilt (§ 14); $\sigma_2$ ist allen Räumen homöomorph, die sich nach der folgenden einfachen Regel aus ihm ergeben, und nur diesen: ist $p_1, p_2, \ldots$ eine Folge positiver Zahlen, so betrachte man den Raum aller Stellen $\mathfrak{x}$, für die $\left(\frac{x_1}{p_1}, \frac{x_2}{p_2}, \ldots\right)$ eine Stelle von $\sigma_2$ ist (§ 12). Für den halbfiniten Raum liegt ein entsprechendes Resultat in der anschließenden Arbeit von A. Weber vor; hier ergeben sich alle homöomorphen Räume durch bloße Umordnung der Koordinaten[7]).

Das Problem der Auflösung unendlichvieler linearer Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten nimmt in unserer Auffassung auch ein gänzlich anderes Gesicht an, als in der Hausdorff-Banachschen. Der finite Raum und der halbfinite, die einzigen Räume, für die bisher eine wirklich durchgeführte, in sich abgeschlossene Auflösungstheorie vorliegt[8]), scheiden für die Hausdorff-Banachsche Theorie überhaupt aus. Es ist der Hauptzweck der vorliegenden Arbeit, die Grundlage zu schaffen, auf der analoge Auflösungstheorien für andere Räume oder Klassen von Räumen gewonnen werden können.

## Kapitel I. Lineare Räume.

### § 1. Lineare Koordinatenräume.

**Definition 1.** *Unter einem linearen Koordinatenraum $\lambda$ sei eine Menge von Stellen $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ mit komplexen Koordinaten $x_i$ verstanden, die mit $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ stets auch die Stelle $\mathfrak{x} + \mathfrak{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \ldots)$ und $r\mathfrak{x} = \mathfrak{x}r = (rx_1, rx_2, rx_3, \ldots)$ enthält ($r$ komplex)*[9]). *$\mathfrak{o}$ sei die Stelle $(0, 0, 0, \ldots)$.*

Jeder solche Koordinatenraum erfüllt die Axiome eines abstrakten linearen Raumes:

1. $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$
2. $\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c}$
3. $\mathfrak{a} + \mathfrak{o} = \mathfrak{a}$
4. $\mathfrak{a} + \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ eindeutig lösbar
5. $a\mathfrak{a} = \mathfrak{a}a$
6. $a(b\mathfrak{a}) = (ab)\mathfrak{a}$
7. $0 \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{o}$
8. $1 \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$
9. $a\mathfrak{a} + b\mathfrak{a} = (a + b)\mathfrak{a}$
10. $a\mathfrak{a} + a\mathfrak{b} = a(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$[10]).

Die Gesamtheit *aller* Stellen $(x_1, x_2, \ldots)$ überhaupt bildet einen solchen linearen Koordinatenraum, den wir als $\omega$ bezeichnen. Ebenso bildet die Menge $\varphi$ aller derjenigen

[7]) Die Homöomorphie zweier Räume bedingt die Isomorphie der zugehörigen Matrizenringe (§ 8). A. Weber betrachtet das Problem der Isomorphie maximaler Matrizenringe ohne Rücksicht darauf, ob diese aus linearen Räumen entsprungen sind.

[8]) O. Toeplitz, Pal. Rend. **28**, 1909, p. 88—96; G. Köthe und O. Toeplitz, Journ. f. Math. **165**, 1931, p. 116—127. Für den $\sigma_2$ liegt ein wesentliches Teilresultat, das aber noch keine invarianten Normalformen liefert, in der Arbeit von W. Schmeidler vor, Journ. f. Math. **163**, 1929, p. 135—140.

[9]) Kleine lateinische Buchstaben bezeichnen in der ganzen Arbeit komplexe Zahlen; kleine deutsche Buchstaben Stellen; kleine griechische Buchstaben lineare Räume, die aus Stellen bestehen; große deutsche Buchstaben lineare Transformationen solcher Räume (Matrizen); große griechische Buchstaben Systeme von solchen Matrizen.

[10]) Vgl. Hausdorff, l. c. Anm. 5, p. 294.

Stellen, von deren Koordinaten nur endlichviele nicht verschwinden, einen linearen Koordinatenraum, und ebenso die Menge $\sigma_r$ aller Stellen, für die $|x_1|^r + |x_2|^r + |x_3|^r + \cdots$ konvergiert ($r \geqq 1$). $\sigma_2$ ist der zuerst und am meisten systematisch studierte Hilbertsche Raum. Der Leser findet diese Beispiele im III. Kapitel einheitlich behandelt und kann dort nachschlagen, wenn er einzelne Stücke der hier folgenden Theorie an Beispielen illustriert haben möchte.

## § 2. Der duale Raum. Vollkommene Räume.

**Definition 1.** *Der zu $\lambda$ duale Raum $\lambda^*$ ist die Menge aller Stellen $\mathfrak{u} = (u_1, u_2, \ldots)$, für die $u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots$ stets absolut konvergiert, falls $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ irgendeine Stelle aus $\lambda$ ist.*

Daß die Menge $\lambda^*$ selbst ein linearer Koordinatenraum ist, ist unmittelbar klar.

**Satz 1.** *Der zum dualen Raum $\lambda^*$ duale Raum $\lambda^{**}$ enthält $\lambda$ als Teil.*

Denn ist $\mathfrak{x}$ eine Stelle aus $\lambda$, $\mathfrak{u}$ eine Stelle aus $\lambda^*$, so ist $\Sigma u_i x_i$ absolut-konvergent; die $x_i$ sind also die Koeffizienten einer Linearform über $\lambda^*$, die für jedes $\mathfrak{u}$ aus $\lambda^*$ absolut konvergiert; also ist $\mathfrak{x}$, wenn es zu $\lambda$ gehört, auch eine Stelle aus $\lambda^{**}$.

**Satz 2.** *Es ist stets $\lambda^{***} = \lambda^*$.*

Aus Satz 1 folgt $\lambda^* \leqq \lambda^{***}$. Ist nun $\mathfrak{v}$ eine Stelle aus $\lambda^{***}$, so ist $\Sigma |v_n y_n|$ konvergent für jedes $\mathfrak{y}$ aus $\lambda^{**}$, also nach Satz 1 auch für jedes $\mathfrak{y}$ aus $\lambda$. Das besagt aber, daß $\mathfrak{v}$ zu $\lambda^*$ gehört. Jedes $\mathfrak{v}$ aus $\lambda^{***}$ gehört also zu $\lambda^*$, d. h. $\lambda^{***} \leqq \lambda^*$.

**Definition 2.** *$\lambda$ heiße vollkommen, wenn $\lambda^{**} = \lambda$.*

**Satz 3.** *Jeder vollkommene Raum enthält $\varphi$.*

Denn sei $\mathfrak{y}$ eine Stelle aus $\varphi$, $\mathfrak{u}$ eine Stelle aus $\lambda^*$, so ist $\Sigma |u_n y_n|$ sicher konvergent, da es abbricht, also $\mathfrak{y}$ in $\lambda^{**}$ gelegen. Ist aber $\lambda$ vollkommen, so ist $\lambda = \lambda^{**}$, also $\mathfrak{y}$ auch in $\lambda$ gelegen, $\varphi \leqq \lambda$.

**Satz 4.** *Ist $\mu \leqq \lambda$, so ist $\mu^* \geqq \lambda^*$, $\mu^{**} \leqq \lambda^{**}$.*

Denn irgendein $\mathfrak{u}$ aus $\lambda^*$ ergibt konvergentes $\Sigma |u_n x_n|$ für *jedes* $\mathfrak{x}$ aus $\lambda$, also, wenn $\mu \leqq \lambda$, insbesondere auch für jedes $\mathfrak{x}$ aus $\mu$.

Ist $\mathfrak{x}$ eine Stelle aus $\lambda$, $\mathfrak{u}$ eine Stelle aus $\lambda^*$, so soll die Zahl $\Sigma u_n x_n$ mit $\mathfrak{u}\mathfrak{x}$ bezeichnet werden.

**Zusatz.** *$\lambda^*$ ist stets vollkommen, enthält also stets $\varphi$; $\lambda^{**}$ ist der kleinste vollkommene Raum, in dem $\lambda$ enthalten ist.*

## § 3. Konvergente Folgen von Stellen. Vollständige Räume.

**Definition 1.** *Die Folge von Stellen $\mathfrak{x}^{(1)}, \mathfrak{x}^{(2)}, \ldots$ des Raumes $\lambda$ heiße konvergent, wenn $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{u}\mathfrak{x}^{(n)}$ für jede Stelle $\mathfrak{u}$ aus $\lambda^*$ existiert.*

**Definition 2.** *Eine Stelle $\mathfrak{x}$ aus $\lambda$ heiße Limes einer Folge $\mathfrak{x}^{(1)}, \mathfrak{x}^{(2)}, \ldots$ von Stellen aus $\lambda$, wenn für jedes $\mathfrak{u}$ aus $\lambda^*$ gilt: $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{u}\mathfrak{x}^{(n)} = \mathfrak{u}\mathfrak{x}$* [11]).

**Definition 3.** *Ein linearer Koordinatenraum $\lambda$ heiße vollständig, wenn in ihm jede konvergente Folge von Stellen einen Limes hat.*

Diese Definitionen erklären die Begriffe: Konvergenz, Limes, Vollständigkeit, ohne einer Metrik zu bedürfen; sie hängen nur vom Raum ab, nicht von der Wahl der Metrik in diesem Raum.

[11]) Man kann übrigens auch eine *Topologie* in $\lambda$ einführen, die den obigen Konvergenzbegriff liefert. Sei $\mathfrak{u}_1, \ldots, \mathfrak{u}_n$ eine endliche Zahl gegebener Stellen aus $\lambda^*$ und $\varepsilon > 0$, so heiße „Umgebung $\mathfrak{U}(\mathfrak{u}_1, \ldots, \mathfrak{u}_n; \varepsilon)$ von $\mathfrak{x}$" die Gesamtheit aller Stellen $\mathfrak{y}$ aus $\lambda$, die die Ungleichungen $|\mathfrak{u}_i(\mathfrak{x} - \mathfrak{y})| \leqq \varepsilon$ $(i = 1, \ldots n)$ erfüllen. Dieses Umgebungssystem in $\lambda$ erfüllt die vier Hausdorffschen Umgebungsaxiome (vgl. Hausdorff, Mengenlehre, 2. Aufl. 1927, p. 228 (A), (B), (C) und p. 229 (5)). Eine Folge von Stellen $\mathfrak{x}^{(n)}$ ist dann und nur dann im Sinne der obigen Konvergenzdefinition gegen $\mathfrak{x}$ konvergent, wenn $\mathfrak{x}$ einziger Häufungspunkt von $\mathfrak{x}^{(n)}$ im Sinne der Topologie ist.

**Satz 1.** *Jede konvergente Folge* $\mathfrak{x}^{(n)}$ *ist „koordinatenweise" konvergent, d. h.* $\lim_{n\to\infty} x_i^{(n)}$ *existiert für jedes einzelne* $i$. *Ist* $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{x}^{(n)} = \mathfrak{x}$, *so ist* $\lim_{n\to\infty} x_i^{(n)} = x_i$.

Die Konvergenz von $\mathfrak{x}^{(n)}$ besagt nach Definition 1, daß $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{u}\mathfrak{x}^{(n)}$ existiert für jede Stelle $\mathfrak{u}$ aus $\lambda^*$. Nun enthält $\lambda^*$ nach § 2, Satz 3 den Raum $\varphi$, also auch die Stelle

$$\mathfrak{e}_i = (0, \ldots 0, 1, 0, \ldots),$$

deren $i$-te Koordinate 1 ist, während alle ihre anderen Koordinaten verschwinden. Es existiert also auch $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{e}_i \mathfrak{x}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} x_i^{(n)}$. Ebenso folgt der zweite Teil der Behauptung aus Definition 2.

**Satz 2.** *In einem Raum* $\lambda$, *der* $\varphi$ *als Teil enthält, ist jede Stelle* $\mathfrak{x}$ *der Limes ihrer „Abschnitte"* $\mathfrak{x}_n = (x_1, x_2, \ldots x_n, 0, 0, \ldots)$.

Denn ist $\mathfrak{u}$ eine Stelle aus $\lambda^*$, so ist $\mathfrak{u}\mathfrak{x}_n = u_1 x_1 + \cdots + u_n x_n$ die $n$-te Partialsumme von $\mathfrak{u}\mathfrak{x} = u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots$; nun ist diese Reihe absolut-konvergent, also konvergent; daher ist $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{x}_n = \mathfrak{x}$ im Sinne der Definition 2.

**Satz 3.** *Ist* $\lambda$ *vollständig und enthält es* $\varphi$ *als Teil, so ist es vollkommen.*

Nach § 2, Zusatz zu Satz 4, und Satz 3 enthält $\lambda^{**}$ den Raum $\varphi$. Wendet man also auf irgendeine Stelle $\mathfrak{x}$ aus $\lambda^{**}$ Satz 2 an, so ist $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{x}_n = \mathfrak{x}$, d. h. $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{u}\mathfrak{x}_n = \mathfrak{u}\mathfrak{x}$ für alle $\mathfrak{u}$ aus $\lambda^{***}$. Da $\lambda^{***} = \lambda^*$, so ist also die Folge $\mathfrak{x}_n$ auch in $\lambda$ konvergent. Ist nun $\lambda$ vollständig, so hat die Folge $\mathfrak{x}_n$ auch in $\lambda$ einen Limes, der nach Satz 1 mit $\mathfrak{x}$ übereinstimmt; also liegt jede Stelle aus $\lambda^{**}$ in $\lambda$, d. h. $\lambda \geqq \lambda^{**}$. Andererseits folgt aus § 2, Satz 1, daß $\lambda^{**} \geqq \lambda$ ist; mithin ist $\lambda = \lambda^{**}$, d. h. $\lambda$ ist vollkommen.

**Definition 4.** *Der Raum* $\lambda$ *heiße normal, wenn mit einer Stelle* $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ *auch jede Stelle* $\mathfrak{y} = (y_1, y_2, \ldots)$ *mit* $|y_i| \leqq |x_i|$ *ihm angehört.*

**Satz 4.** *Jeder vollkommene Raum ist normal.*

Denn ist $\mathfrak{x}$ eine Stelle aus $\lambda$, so ist $\Sigma u_n x_n$ absolut-konvergent für jedes $\mathfrak{u}$ aus $\lambda^*$; ist $\mathfrak{y}$ eine Stelle, für die $|y_n| \leqq |x_n|$ gilt, so ist auch $\Sigma u_n y_n$ stets absolut-konvergent, wenn $\mathfrak{u}$ in $\lambda^*$, d. h. $\mathfrak{y}$ ist in $\lambda^{**}$ gelegen. Ist nun $\lambda$ vollkommen, d. h. $\lambda = \lambda^{**}$, so liegt $\mathfrak{y}$ in $\lambda$, d. h. $\lambda$ ist normal.

Daß nicht umgekehrt jeder normale Raum vollkommen ist, zeigt das Beispiel des Raumes $\nu$ aller Stellen, deren Koordinaten eine Nullfolge bilden. Sein dualer Raum $\nu^*$ ist der Raum $\sigma_1$ aller Folgen von absolut-konvergenter Summe; denn ist $|u_1| + |u_2| + \cdots$ divergent, so kann man leicht eine Nullfolge $x_1, x_2, \ldots$ bestimmen, so daß $\Sigma |u_i x_i|$ immer noch divergiert; ist aber $\Sigma |u_i|$ konvergent, so ist offenbar $\Sigma |u_i x_i|$ auch dann schon konvergent, wenn $x_i$ eine beschränkte Folge ist; $\nu^{**}$ ist also der Raum $\sigma_\infty$ aller beschränkten Folgen, also $> \nu$.

Ein anderes Beispiel eines normalen, aber nicht vollkommenen Raumes, das uns auch zu anderem Zweck dienlich sein wird, ist der Raum $\omega_0$ derjenigen Stellen, bei denen der Quotient der Zahl $d_n$ der Nichtnullen unter den ersten $n$ Koordinaten, dividiert durch $n$, den Limes 0 hat. Er ist offenbar normal. Weiter ist $\omega_0^* = \varphi$. Denn würde $\omega_0^*$ irgendeine Stelle $\mathfrak{u}$ enthalten, unter deren Koordinaten sich unendlichviele Nichtnullen befinden, so greife man unter diesen eine Teilfolge der Dichte 0 heraus und betrachte diejenige Stelle, die dort die reziproken Werte zu Koordinaten hat, sonst lauter Nullen: $\mathfrak{x} = \left(0, \ldots 0, \frac{1}{u_{n_1}}, 0, \ldots 0, \frac{1}{u_{n_2}}, 0, \ldots\right)$. Sie gehört zu $\omega_0$, und $\mathfrak{u}\mathfrak{x}$ divergiert. Also ist $\omega_0^* \leqq \varphi$, und nach § 2, Satz 2 und 3 ist $\omega_0^* \geqq \varphi$, daher $\omega_0^* = \varphi$. Da $\varphi^* = \omega$ ist, folgt $\omega_0^{**} = \omega > \omega_0$, d. h. $\omega_0$ ist *nicht* vollkommen.

**Satz 5.** *Jeder vollkommene Raum ist vollständig.*

Der Beweis beruht in der Hauptsache auf dem

**Hilfssatz.** *Ist* $\mathfrak{x}^{(1)}, \mathfrak{x}^{(2)}, \ldots$ *eine konvergente Folge von Stellen des normalen Raumes* $\lambda$, *so gibt es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *und jedem* $\mathfrak{u}$ *aus* $\lambda^*$ *ein* $n$, *sodaß für* $p, q \geqq n(\varepsilon, \mathfrak{u})$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |u_i|\,|x_i^{(p)} - x_i^{(q)}| \leqq \varepsilon$$

*ist.*

Aus diesem Hilfssatz ergibt sich nämlich die Behauptung folgendermaßen: ist $\mathfrak{x}^{(n)}$ eine konvergente Folge von Stellen aus $\lambda$, u eine Stelle aus $\lambda^*$, so folgt aus dem Hilfssatz für jedes $m$

$$\sum_{i=1}^{m} |u_i|\,|x_i^{(p)} - x_i^{(q)}| \leqq \varepsilon\,,$$

und, indem man bei festem $m$ und $q$ das $p$ wachsen läßt und Satz 1 anwendet:

$$\sum_{i=1}^{m} |u_i|\,|x_i - x_i^{(q)}| \leqq \varepsilon\,, \tag{1}$$

ferner, wenn man nunmehr $m$ wachsen läßt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |u_i|\,|x_i - x_i^{(q)}| \leqq \varepsilon\,. \tag{2}$$

Aus (1) entnimmt man zuerst die absolute Konvergenz von $\sum_{i=1}^{\infty} u_i x_i$; denn aus (1) folgt nach der für irgend zwei komplexe Zahlen gültigen Regel

$$|a - b| \geqq |a| - |b|\,,$$

daß

$$\varepsilon \geqq \sum_{i=1}^{m} |u_i|\,|x_i - x_i^{(q)}| \geqq \sum_{i=1}^{m} |u_i|\,|x_i| - \sum_{i=1}^{m} |u_i|\,|x_i^{(q)}|$$

oder

$$\sum_{i=1}^{m} |u_i|\,|x_i| \leqq \varepsilon + \sum_{i=1}^{m} |u_i|\,|x_i^{(q)}|$$

ist. Da $\mathfrak{x}^{(q)}$ in $\lambda$, u in $\lambda^*$ liegt, ist die rechte Seite bei wachsendem $m$ beschränkt, mithin auch die linke. Für jede Stelle u von $\lambda^*$ ist also $\Sigma u_i x_i$ absolut konvergent, d. h. $\mathfrak{x}$ ist eine Stelle von $\lambda^{**} = \lambda$. (2) besagt alsdann auf Grund der gleichen Überlegung, daß $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{x}^{(n)} = \mathfrak{x}$ ist.

Nun der *Beweis des Hilfssatzes.* Gesetzt, er wäre falsch, so gäbe es ein $\varepsilon > 0$ und ein u aus $\lambda^*$, für das es eine Folge von Indizespaaren $p_j, q_j$ gibt, so daß

$$\sum_{i=1}^{\infty} |u_i|\,|x_i^{(p_j)} - x_i^{(q_j)}| > \varepsilon$$

ist. Sei dann zuerst $N_1$ so groß, daß

$$\sum_{i=N_1+1}^{\infty} |u_i|\,|x_i^{(p_1)} - x_i^{(q_1)}| \leqq \frac{1}{5}\,\varepsilon \quad \text{und somit} \quad \sum_{i=1}^{N_1} \cdots > \frac{4}{5}\,\varepsilon$$

ausfällt. Man setze alsdann $v_1 = u_1 \varepsilon_1$, $v_2 = u_2 \varepsilon_2$, ..., wo die $\varepsilon_i$ vom Betrage 1 und von noch freien Arcus sind, und bestimme zunächst die Arcus von $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{N_1}$ so, daß jeder Summand $v_i(x_i^{(p_1)} - x_i^{(q_1)})$ reell und nicht-negativ ausfällt; dann wird

$$\sum_{i=1}^{N_1} v_i(x_i^{(p_1)} - x_i^{(q_1)}) = \sum_{i=1}^{N_1} |u_i|\,|x_i^{(p_1)} - x_i^{(q_1)}| > \frac{4}{5}\,\varepsilon\,.$$

Es ist jetzt klar, daß

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} v_i(x_i^{(p_1)} - x_i^{(q_1)})\right| > \frac{3}{5}\,\varepsilon, \quad \text{also gewiß} > \frac{1}{5}\,\varepsilon$$

sein wird, *wie man auch die Arcus der* $\varepsilon_{N_1+1}, \ldots$ *wählen mag.*

Wegen der koordinatenweisen Konvergenz der $\mathfrak{x}^{(n)}$ kann man bei festem $N_1$ neben dem eben betrachteten $j_1 = 1$ ein späteres $j_2$ so wählen, daß

$$\sum_{i=1}^{N_1} |v_i|\,|x_i^{(p_{j_\alpha})} - x_i^{(q_{j_\alpha})}| \leqq \frac{1}{5}\varepsilon$$

wird. Alsdann werde $N_2 > N_1$ so gewählt, daß

$$\sum_{i=N_1+1}^{\infty} |v_i|\,|x_i^{(p_{j_\alpha})} - x_i^{(q_{j_\alpha})}| \leqq \frac{1}{5}\varepsilon \text{ und somit } \sum_{i=1}^{N_2} \cdots > \frac{4}{5}\varepsilon$$

wird. Jetzt erteile man $\varepsilon_{N_1+1}, \ldots, \varepsilon_{N_2}$ solche Arcus, daß

$$\sum_{i=N_1+1}^{N_2} v_i(x_i^{(p_{j_\alpha})} - x_i^{(q_{j_\alpha})}) = \sum_{i=N_1+1}^{N_2} |u_i|\,|x_i^{(p_{j_\alpha})} - x_i^{(q_{j_\alpha})}| > \frac{3}{5}\varepsilon$$

wird, und also

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} v_i(x_i^{(p_{j_\alpha})} - x_i^{(q_{j_\alpha})})\right| \geqq \left|\sum_{i=N_1+1}^{N_2} \cdots\right| - \left|\sum_{i=1}^{N_1} \cdots\right| - \left|\sum_{i=N_2+1}^{\infty} \cdots\right| > \frac{1}{5}\varepsilon\,.$$

Auf diese Weise kann man fortfahren.

So entsteht sukzessive eine Stelle $\mathfrak{v} = (v_1, v_2, \ldots)$; wegen $|v_i| = |u_i|$ gehört auch sie zu $\lambda^*$, da $\lambda^*$ nach § 2, Satz 2 vollkommen und nach § 3, Satz 4 also normal ist. Sie ist so konstruiert, daß für $\alpha = 1, 2, \ldots$

$$|\mathfrak{v}(\mathfrak{x}^{(p_{j_\alpha})} - \mathfrak{x}^{(q_{j_\alpha})})| > \frac{1}{5}\varepsilon$$

ist, in Widerspruch dazu, daß die $\mathfrak{x}^{(n)}$ eine konvergente Folge bilden.

**Definition 5.** *Eine Linearfunktion, d. h. eine Funktion $u(\mathfrak{x})$, die jeder Stelle $\mathfrak{x}$ aus $\lambda$ eine komplexe Zahl $u$ in der Weise zuordnet, daß $u(r\mathfrak{x}) = r \cdot u(\mathfrak{x})$, $u(\mathfrak{x}+\mathfrak{y}) = u(\mathfrak{x}) + u(\mathfrak{y})$ ist, heiße stetig, wenn für jede Folge $\mathfrak{x}^{(n)}$ mit Limes aus $\lambda$ gilt:* $\lim_{n\to\infty} u(\mathfrak{x}^{(n)}) = u(\lim_{n\to\infty} \mathfrak{x}^{(n)})$.

*Der von den stetigen Linearfunktionen gebildete lineare Raum heiße der zu $\lambda$ konjugierte Raum $\lambda'$.*

**Satz 6.** *Ist $\lambda \geqq \varphi$ und normal, so stellt jede „Linearform" $\mathfrak{u}\mathfrak{x}$, wo $\mathfrak{u}$ eine Stelle aus $\lambda^*$ ist, eine stetige Linearfunktion dar und umgekehrt; in diesem Sinne ist $\lambda' = \lambda^*$.*

Zuerst ist unmittelbar klar, daß jede Linear*form*[12]) $\mathfrak{u}\mathfrak{x} = u_1x_1 + u_2x_2 + \cdots$, wo $\mathfrak{u} = (u_1, u_2, \ldots)$ eine Stelle aus $\lambda^*$ ist, eine stetige Linearfunktion darstellt. Ist nun umgekehrt $u(\mathfrak{x})$ eine stetige Linearfunktion im Sinne der Definition 5, und ist $\mathfrak{x}$ irgendeine Stelle aus $\lambda$, so existiert $\lim_{n\to\infty} u(\mathfrak{x}_n) = \lim_{n\to\infty} [x_1\,u(\mathfrak{e}_1) + \cdots + x_n\,u(\mathfrak{e}_n)]$, d. h. die Reihe $u(\mathfrak{e}_1)x_1 + u(\mathfrak{e}_2)\,x_2 + u(\mathfrak{e}_3)\,x_3 + \cdots$ konvergiert für jedes $\mathfrak{x}$ aus $\lambda$. Da dies für *jedes* $\mathfrak{x}$ aus $\lambda$ gilt und $\lambda$ normal ist, folgert man daraus leicht die *absolute* Konvergenz der Reihe. Setzt man also $u(\mathfrak{e}_n) = u_n$ und $\mathfrak{u} = (u_1, u_2, \ldots)$, so ist $\mathfrak{u}$ eine Stelle aus $\lambda^*$. Nun ist nach Satz 2 $\mathfrak{x} = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{x}_n$ und daher nach Definition 5 $u(\mathfrak{x}) = u(\lim_{n\to\infty} \mathfrak{x}_n) = \lim_{n\to\infty} u(\mathfrak{x}_n)$, also gleich dem Wert der Linearform $\mathfrak{u}\mathfrak{x}$.

## § 4. Relative Konvergenz.

Der Konvergenzbegriff von § 3 ist von jeder Metrik, die etwa in $\lambda$ hergestellt wird, unabhängig; er ist aber nicht der einzige Konvergenzbegriff, der ohne Verwendung einer Metrik aufgestellt werden kann. Für einen Teil unserer Theorie wird die folgende Verallgemeinerung wesentlich sein. Wir lassen $\mathfrak{u}$ nicht mehr den ganzen dualen Raum $\lambda^*$ durchlaufen, sondern einen linearen Teilraum $\mu$, der seinerseits $\varphi$ enthält:

$$\varphi \leqq \mu \leqq \lambda^*.$$

---

[12]) Hausdorff gebraucht das Wort „Linearform" für den unserer „Linearfunktion" analogen Begriff seiner Theorie. Da wir zwischen dem Ausdruck $\Sigma u_i x_i$ und der abstrakten Linearfunktion sorgfältig scheiden müssen, sind wir genötigt, die Hausdorffsche Benennung umzustürzen.

Hiernach definiert sich unmittelbar die relative Konvergenz der Folge $\mathfrak{x}^{(n)}$ bezüglich $\mu$, der relative Limes $\mathfrak{x}$ der Folge $\mathfrak{x}^{(n)}$ bezüglich $\mu$ und die relative Vollständigkeit von $\lambda$ bezüglich $\mu$.

$\mu = \lambda^*$ ergibt die Begriffe von § 3 als Spezialfall. Der andere Extremfall $\mu = \varphi$ bedeutet, daß $\mathfrak{u}\mathfrak{x}^{(n)}$ für jede *finite* Stelle $\mathfrak{u} = (u_1, \ldots u_k, 0, \ldots)$ bei wachsendem $n$ einen Grenzwert hat. Dieselbe Überlegung wie beim Beweise von § 3, Satz 1 ergibt, *daß für $\mu = \varphi$ die relative Konvergenz der Folge $\mathfrak{x}^{(n)}$ äquivalent wird mit ihrer koordinatenweisen Konvergenz, ebenso der relative Limes mit dem koordinatenweisen Limes, die relative Vollständigkeit damit, daß für jede koordinatenweise konvergente Folge $\mathfrak{x}^{(n)}$ aus $\lambda$ die Stelle $\mathfrak{x}$, die $x_i = \lim_{n\to\infty} x_i^{(n)}$ zu Koordinaten hat, wieder zu $\lambda$ gehört.*

*$\omega$ ist vollständig bezüglich $\varphi$ und ist der einzige Raum $\geqq \varphi$, der diese Eigenschaft hat*, wie man leicht überlegt.

**Satz 1.** *Ist $\varphi \leqq \mu \leqq \lambda^*$ und $\lambda \geqq \varphi$ und vollständig bezüglich $\mu$, so ist $\lambda$ vollkommen, und zwar gleich $\mu^*$.*

Der Beweis ergibt sich mit einer geringen Änderung aus dem von § 3, Satz 3, wobei man statt $\lambda^{**}$ überall $\mu^*$ zu nehmen und § 2, Satz 4 zweimal heranzuziehen hat.

**Satz 2.** *Ist $\mu$ normal und $\geqq \varphi$, so ist $\mu^*$ vollständig bezüglich $\mu$.*

Satz 5 von § 3 ist ein Spezialfall dieses Satzes, für $\mu = \lambda^*$. Man muß im Beweise von § 3, Satz 5 überall $\lambda^*$ durch $\mu$ und $\lambda$ durch $\mu^*$ ersetzen, um unmittelbar den Beweis von Satz 2 zu erhalten.

Sei $\varphi \leqq \mu \leqq \nu \leqq \lambda^*$, so erkennt man unmittelbar, daß die Konvergenz (und der Limes) einer Folge $\mathfrak{x}^{(n)}$ aus $\lambda$ bezüglich $\nu$ die (den) bezüglich $\mu$ zur Folge hat. Satz 2 gestattet nun, auch die Vollständigkeit bezüglich $\mu$ mit der bezüglich $\nu$ unter gewissen Voraussetzungen zu vergleichen:

**Satz 3.** *Ist $\varphi \leqq \mu \leqq \nu \leqq \lambda^*$, sind außerdem $\mu$ und $\nu$ normal und ist $\lambda$ vollständig bezüglich $\mu$, so auch bezüglich $\nu$. Insbesondere zieht also jede relative Vollständigkeit von $\lambda$ die Vollständigkeit schlechthin nach sich.*

Wendet man nämlich zuerst Satz 1 auf $\lambda$ und $\mu$ an, so erhält man, daß $\lambda$ vollkommen ist und $\lambda = \mu^*$. Wegen $\lambda \leqq \nu^* \leqq \mu^*$ (§ 2, Satz 4) folgt $\lambda = \nu^* = \mu^*$; wendet man jetzt Satz 2 auf $\nu$ an, so folgt die Behauptung.

## § 5. Starke Konvergenz *).

**Definition 1.** *Eine Menge $X$ von Stellen $\mathfrak{x}$ des Raumes $\lambda$ heiße beschränkt, wenn es für jedes $\mathfrak{u}$ aus $\lambda^*$ eine positive Zahl $r(\mathfrak{u})$ gibt, so daß für alle $\mathfrak{x}$ aus $X$ stets $|\mathfrak{u}\mathfrak{x}| \leqq r(\mathfrak{u})$ gilt.*

Indem man diesen Begriff statt auf $\lambda$ auf $\lambda^*$ anwendet, kann man folgende weitere Definition aufstellen:

**Definition 2.** *Eine Menge $X$ von Stellen $\mathfrak{x}$ des Raumes $\lambda$ heiße voll-beschränkt, wenn es für jede beschränkte Menge $U$ von Stellen $\mathfrak{u}$ aus $\lambda^*$ eine positive Zahl $r(U)$ gibt, so daß $|\mathfrak{u}\mathfrak{x}| \leqq r(U)$ für alle $\mathfrak{x}$ aus $X$ und alle $\mathfrak{u}$ aus $U$.*

**Satz 1.** *Eine Menge $X$ von Stellen irgendeines Raumes $\lambda$ ist dann und nur dann voll-beschränkt, wenn sie beschränkt ist.*

**Hilfssatz.** *Ist $\mathfrak{x}^{(1)}, \mathfrak{x}^{(2)}, \ldots$ eine Folge von Stellen aus $\lambda$, die eine beschränkte Menge bilden, $c_i$ eine Folge positiver Zahlen von konvergenter Summe, so ist die Summe $\sum_{i=1}^{\infty} c_i \mathfrak{x}^{(i)}$ konvergent, d. h. die Folge ihrer Partialsummen ist eine konvergente Folge.*

Es ist nämlich für jedes $\mathfrak{u}$ aus $\lambda^*$ und $n < m$

*) Für die Lektüre von § 6 und großer Teile der weiteren §§ von Kapitel II ist die Kenntnis von § 5 nicht erforderlich.

$$\left| \mathfrak{u}\Big(\sum_{i=n}^{m} c_i\, \mathfrak{x}^{(i)}\Big)\right| = \left|\sum_{i=n}^{m} c_i\, \mathfrak{u}\mathfrak{x}^{(i)}\right| \leqq \sum_{i=n}^{m} c_i\, |\mathfrak{u}\mathfrak{x}^{(i)}| \leqq r(\mathfrak{u}) \sum_{i=n}^{m} c_i,$$

also bei gegebenem $\mathfrak{u}$ und hinreichend großem $n$ beliebig klein.

*Beweis von Satz 1.* Daß jede voll-beschränkte Menge beschränkt ist, ist klar. Ist umgekehrt $X$ eine beschränkte Menge aus $\lambda$ und ist $U$ irgendeine beschränkte Menge aus $\lambda^*$, so ist einerseits $r(\mathfrak{u}) = \sup_{\mathfrak{x}\text{ aus }X} |\mathfrak{u}\mathfrak{x}|$ endlich für jedes $\mathfrak{u}$ aus $\lambda^*$, andererseits $s(\mathfrak{x}) = \sup_{\mathfrak{u}\text{ aus }U} |\mathfrak{u}\mathfrak{x}|$ endlich für jedes $\mathfrak{x}$ aus $\lambda$.

Wäre nun $X$ nicht voll-beschränkt, so gäbe es eine beschränkte Menge $U$ in $\lambda^*$ und eine Folge $\mathfrak{x}^{(j)}$, $\mathfrak{u}^{(j)}$ von Stellen aus $X$ bzw. $U$, so daß $|\mathfrak{u}^{(j)}\mathfrak{x}^{(j)}|$ mit wachsendem $j$ gegen $\infty$ geht. Wir bestimmen nun [13]) zwei Folgen $j_n$ und $k_n$ wachsender natürlicher Zahlen, und zwar, indem wir $k_0 = 0$ setzen, rekursiv von $n = 1$ beginnend: nachdem $j_1, \ldots, j_{n-1}$ und $k_1, \ldots, k_{n-1}$ gewählt sind, werden $j_n$ und $k_n$ aus den beiden folgenden Ungleichungen bestimmt:

$$\frac{1}{2^{k_n-1}} |\mathfrak{u}^{(j_n)}\mathfrak{x}^{(j_n)}| > r(\mathfrak{u}^{(j_1)}) + \frac{1}{2^{k_1}} r(\mathfrak{u}^{(j_2)}) + \cdots + \frac{1}{2^{k_n-2}} r(\mathfrak{u}^{(j_{n-1})}) + 2n = R_n + 2n$$

und

$$s(\mathfrak{x}^{(j_n)}) < 2^{k_n-1}\, n\,.$$

Dann ist nach dem Hilfssatz, angewendet auf $\lambda^*$ statt $\lambda$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k_n-1}}\, \mathfrak{u}^{(j_n)}$$

konvergent; nach § 3, Satz 5 und § 2, Zusatz zu Satz 4 stellt also die Summe $\mathfrak{v}$ dieser Reihe eine Stelle aus $\lambda^*$ dar.

Sei nun $\mathfrak{v}$ in drei Teile zerlegt:

$$\mathfrak{v} = \left[\mathfrak{u}^{(j_1)} + \cdots + \frac{1}{2^{k_n-2}}\, \mathfrak{u}^{(j_{n-1})}\right] + \frac{1}{2^{k_n-1}}\, \mathfrak{u}^{(j_n)} + \left[\frac{1}{2^{k_n}}\, \mathfrak{u}^{(j_{n+1})} + \cdots\right]$$

$$= \qquad \mathfrak{r}_n \qquad + \frac{1}{2^{k_n-1}}\, \mathfrak{u}^{(j_n)} + \qquad \mathfrak{f}_n\,,$$

so wäre

$$|\mathfrak{r}_n \mathfrak{x}^{(j_n)}| \leqq |\mathfrak{u}^{(j_1)}\mathfrak{x}^{(j_n)}| + \cdots + \frac{1}{2^{k_n-2}} |\mathfrak{u}^{(j_{n-1})}\mathfrak{x}^{(j_n)}|$$

$$\leqq r(\mathfrak{u}^{(j_1)}) + \cdots + \frac{1}{2^{k_n-2}} r(\mathfrak{u}^{(j_{n-1})}) = R_n$$

$$|\mathfrak{f}_n \mathfrak{x}^{(j_n)}| \leqq \frac{1}{2^{k_n}} |\mathfrak{u}^{(j_{n+1})}\mathfrak{x}^{(j_n)}| + \frac{1}{2^{k_n+1}} |\mathfrak{u}^{(j_{n+2})}\mathfrak{x}^{(j_n)}| + \cdots$$

$$\leqq \frac{1}{2^{k_n-1}}\, s(\mathfrak{x}^{(j_n)}) \leqq n\,.$$

Also wäre

$$|\mathfrak{v}\mathfrak{x}^{(j_n)}| \geqq \frac{1}{2^{k_n-1}} |\mathfrak{u}^{(j_n)}\mathfrak{x}^{(j_n)}| - R_n - n > n\,,$$

im Widerspruch zur Beschränktheit von $X$.

**Definition 3.** *„Normale Hülle" $\tilde{X}$ einer beschränkten Menge $X$ aus $\lambda$ heiße die*

[13]) Die hier folgende Schlußweise ist einer von F. Hausdorff (J. f. Math. **167**, 1931, p. 305) nachgebildet.

*Menge aller Stellen* $\tilde{\mathfrak{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots)$, *die zu einer Stelle* $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ *aus* $X$ *in der Beziehung stehen* $|\tilde{x}_n| \leqq |x_n|$.

**Satz 2.** *In einem normalen Raume* $\lambda \geqq \varphi$ *ist die normale Hülle einer beschränkten Menge selbst beschränkt.*

Gesetzt $\tilde{X}$ wäre unbeschränkt, dann gäbe es eine Folge von Stellen $\mathfrak{x}^{(n)}$ aus $\tilde{X}$ und ein u aus $\lambda^*$, so daß $\sum_{i=1}^{\infty} |u_i x_i^{(n)}|$ bei wachsendem $n$ gegen $\infty$ geht. Dann gäbe es aber zu beliebig vorgeschriebenen $c_j > 0$ von konvergenter Summe eine Teilfolge $\mathfrak{x}^{(j)}$ von $\mathfrak{x}^{(n)}$, so daß

$$c_j \sum_{i=1}^{\infty} |u_i x_i^{(j)}| > K \tag{1}$$

ist. Nach dem Hilfssatz zu Satz 1 ist

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j \mathfrak{x}^{(j)}$$

konvergent. Nach dem Hilfssatz zu § 3, Satz 5 (angewendet auf die Partialsummen dieser Reihe und für $q = j$, $p = j + 1$) müßte dann $c_j \sum |u_i x_i^{(j)}| \leqq \varepsilon$ sein für hinreichend große $j$, und das widerspräche (1).

**Definition 4.** *Die Folge* $\mathfrak{x}^{(n)}$ *von Stellen aus* $\lambda$ *heiße stark-konvergent, wenn es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *und jeder beschränkten Menge* $U$ *aus* $\lambda^*$ *ein* $n$ *gibt, so daß* $\sup_{\mathfrak{u} \text{ aus } U} |\mathfrak{u}(\mathfrak{x}^{(p)} - \mathfrak{x}^{(q)})| \leqq \varepsilon$ *für alle* $p, q \geqq n(\varepsilon, U)$.

*Die Folge* $\mathfrak{x}^{(n)}$ *heiße stark-konvergent gegen* $\mathfrak{x}$, *wenn es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *und jeder beschränkten Menge* $U$ *aus* $\lambda^*$ *ein* $n$ *gibt, so daß* $\sup_{\mathfrak{u} \text{ aus } U} |\mathfrak{u}(\mathfrak{x}^{(p)} - \mathfrak{x})| \leqq \varepsilon$ *für alle* $p \geqq n(\varepsilon, U)$ [14]) [15]).

*Der Raum* $\lambda$ *heiße stark-vollständig, wenn jede stark-konvergente Folge von Stellen aus* $\lambda$ *stark gegen eine Stelle aus* $\lambda$ *konvergiert* [16]).

Im Hilbertschen Raum $\sigma_2$ ist die Folge $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots$ konvergent, aber nicht stark konvergent; der Beweis ist aus § 12 leicht zu entnehmen. In $\sigma_1$ dagegen (vgl. § 13) und in allen konvergenzfreien Räumen (vgl. § 15) sind Konvergenz und starke Konvergenz identisch. Die getrennte Einführung beider Begriffe kann also nicht entbehrt werden. Dies äußert sich vor allem darin, daß Satz 2 von § 3 sich nicht immer auf starke Konvergenz überträgt, wie diesmal das Beispiel von $\sigma_\infty$ (vgl. § 13) zeigt. Erst in § 11 wird sich herausstellen, für welche Aufgaben die starke Konvergenz brauchbarer ist als die gewöhnliche.

**Satz 3.** *Wenn eine Folge stark konvergiert und wenn sie zugleich gegen* $\mathfrak{x}$ *konvergiert, so konvergiert sie stark gegen* $\mathfrak{x}$.

**Folgerung.** *Jeder vollständige Raum ist stark-vollständig.*

Sei nämlich $\mathfrak{x}^{(1)}, \mathfrak{x}^{(2)}, \ldots$ eine stark-konvergente Folge, so heißt dies, daß für jede beschränkte Menge $U$ in $\lambda^*$ und jedes $\varepsilon > 0$

---

[14]) Dieser Begriff, den aufzustellen auf Grund des vorangestellten Begriffs der „beschränkten Menge" möglich wurde, ist dem Begriff der „starken Konvergenz" von Hilbert nachgebildet, jedoch unter Vermeidung jeder Metrik, und also auch in allen den Räumen gültig, die bei keiner linearen Metrik vollständig werden. Für den Hilbertschen Raum $\sigma_2$ beweisen wir in § 12, daß unser Begriff mit dem Hilbertschen übereinkommt.

Allgemein gilt folgendes: *In einem normalen Raum* $\lambda$ *läßt sich dann und nur dann eine lineare Metrik so einführen, daß die Konvergenz im Sinne der Metrik mit der starken Konvergenz übereinstimmt, wenn es in* $\lambda^*$ *eine beschränkte Menge* $U$ *gibt, so daß jede andere beschränkte Menge* $V$ *aus* $\lambda^*$ *für geeignetes* $r > 0$ *Teilmenge von* $U_r$ *ist, wo unter* $U_r$ *die Menge aller Stellen* $r\mathfrak{u}$ (u aus $\mathfrak{U}$) *zu verstehen ist.* Im $\sigma_2$ ist die Einheitskugel eine solche Menge $U$; in den konvergenzfreien Räumen dagegen ist diese Bedingung nie erfüllt.

[15]) Ebenso wie bei der gewöhnlichen Konvergenz kann man auch bei der starken Konvergenz eine Topologie einführen, die als zugehörigen Limesbegriff die starke Konvergenz liefert. Zu jeder beschränkten Menge $U$ von Stellen u aus $\lambda^*$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ gehört diesmal als Umgebung $\mathfrak{U}(U, \varepsilon)$ von $\mathfrak{x}$ die Menge aller Stellen $\mathfrak{y}$ von $\lambda$ für die $\sup |\mathfrak{u}(\mathfrak{x} - \mathfrak{y})| < \varepsilon$ ist. Auch dieses Umgebungssystem genügt den vier Hausdorffschen Axiomen.

[16]) Ebenso wie der Begriff der gewöhnlichen Konvergenz kann auch der der starken Konvergenz bezüglich eines Teilraums $\mu \leqq \lambda^*$ betrachtet werden.

(2) $$|\mathfrak{u}(\mathfrak{x}^{(p)} - \mathfrak{x}^{(q)})| \leqq \varepsilon \text{ für } p, q \geqq n(\varepsilon, U), \quad \mathfrak{u} \text{ aus } U.$$

Nun ist die Folge a fortiori konvergent; nach Voraussetzung hat sie einen Limes $\mathfrak{x}$, und es gilt also $\lim_{q\to\infty} \mathfrak{u}\mathfrak{x}^{(q)} = \mathfrak{u}\mathfrak{x}$. Aus (1) folgt also für $q \to \infty$:

$$|\mathfrak{u}(\mathfrak{x}^{(p)} - \mathfrak{x})| \leqq \varepsilon \text{ für } p \geqq n(\varepsilon, U), \quad \mathfrak{u} \text{ aus } U,$$

d. h. $\mathfrak{x}^{(p)}$ konvergiert stark gegen $\mathfrak{x}$.

Unmittelbar aus Definition 1 folgt:

**Satz 4 (Linearformensatz).** *Ist $\lambda$ irgendein Raum, $X$ eine beschränkte Menge in ihm, $\mathfrak{u}$ eine Stelle aus $\lambda^*$, so ist die Linearform $|\mathfrak{u}\mathfrak{x}| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} u_i x_i\right| \leqq m(X)$ für alle $\mathfrak{x}$ aus $X$.*

**Satz 5.** *Jede konvergente Folge eines beliebigen Raumes $\lambda$ ist beschränkt.*

Ist nämlich $\mathfrak{x}^{(1)}, \mathfrak{x}^{(2)}, \ldots$ eine konvergente Folge aus $\lambda$, so ist $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{u}\mathfrak{x}^{(n)}$ vorhanden, also die Zahlenfolge $|\mathfrak{u}\mathfrak{x}^{(n)}| \leqq r(\mathfrak{u})$ beschränkt; nach Definition 1 besagt dies aber, daß die Folge der Stellen $\mathfrak{x}^{(n)}$ beschränkt ist.

**Satz 6.** *Ein Raum $\lambda \geqq \varphi$ habe die Eigenschaft, daß in $\lambda^*$ die Abschnitte $\mathfrak{u}_n$ jeder Stelle $\mathfrak{u}$ stark gegen $\mathfrak{u}$ konvergieren. In einem solchen Raum $\lambda$ ist eine Folge von Stellen dann und nur dann konvergent, wenn sie koordinatenweise konvergiert und zugleich beschränkt ist.*

Die Notwendigkeit der Bedingungen folgt aus § 3, Satz 1 und § 5, Satz 5. Es handelt sich nur um den Beweis des Hinreichens: „wenn $\mathfrak{x}^{(n)}$ in $\lambda$ eine beschränkte Menge $X$ bildet und zugleich koordinatenweise konvergiert, $\lim_{n\to\infty} x_i^{(n)} = x_i$, so ist die Folge konvergent, d. h.

$$|\mathfrak{u}(\mathfrak{x}^{(p)} - \mathfrak{x}^{(q)})| \leqq \varepsilon \text{ für } p, q \geqq n(\varepsilon, \mathfrak{u}), \text{ wo } \mathfrak{u} \text{ aus } \lambda^*.\text{“}$$

Da $\mathfrak{u}_n$ stark gegen $\mathfrak{u}$ konvergiert, kann man ein $m$ so bestimmen, daß $\sup_{\mathfrak{x} \text{ aus } X} |(\mathfrak{u} - \mathfrak{u}_m)\mathfrak{x}^{(n)}| \leqq \frac{1}{4}\varepsilon$ ist. Sodann kann man wegen der koordinatenweisen Konvergenz der Folge $\mathfrak{x}^{(n)}$ ein $n$ bestimmen, so daß $|\mathfrak{u}_m(\mathfrak{x}^{(p)} - \mathfrak{x}^{(q)})| \leqq \frac{1}{2}\varepsilon$ für alle $p, q \geqq n$. Daraus folgt

$$|\mathfrak{u}(\mathfrak{x}^{(p)} - \mathfrak{x}^{(q)})| \leqq |\mathfrak{u}_m(\mathfrak{x}^{(p)} - \mathfrak{x}^{(q)})| + |(\mathfrak{u} - \mathfrak{u}_m)(\mathfrak{x}^{(p)} - \mathfrak{x}^{(q)})| \leqq \varepsilon.$$

Da dies für jedes $\mathfrak{u}$ aus $\lambda^*$ gilt, ist die Folge $\mathfrak{x}^{(n)}$ konvergent.

## Kapitel II. Matrizenringe.

### § 6. Das zu einem Raum $\lambda$ gehörige Matrizensystem $\Sigma(\lambda)$. Matrizenringe.

**Definition 1.** *Die Matrix $\mathfrak{A} = (a_{ik})$ oder die lineare Transformation $y_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k$ heiße zu dem Raum $\lambda$ gehörig, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k$ für jedes $\mathfrak{x}$ aus $\lambda$ und jedes $i$ absolut konvergiert und wenn die „transformierte Stelle“ $\mathfrak{y} = \mathfrak{A}\mathfrak{x}$ wiederum zu $\lambda$ gehört. Das System aller zu $\lambda$ gehörigen Matrizen heiße $\Sigma(\lambda)$.*

**Satz 1.** *Ist $\lambda \geqq \varphi$, so sind alle Spalten aller Matrizen von $\Sigma(\lambda)$ Stellen aus $\lambda$, und umgekehrt tritt jede Stelle aus $\lambda$ als Spalte in irgendeiner Matrix von $\Sigma(\lambda)$ auf: der Spaltenraum von $\Sigma(\lambda)$ ist identisch mit $\lambda$.*

Denn ist $\mathfrak{a}$ eine Spalte einer Matrix $\mathfrak{A}$ aus $\Sigma(\lambda)$, etwa die $q$-te Spalte, so transformiert $\mathfrak{A}$ die Stelle $\mathfrak{e}_q$ in die Stelle $\mathfrak{a} = \mathfrak{A}\mathfrak{e}_q$; da $\mathfrak{e}_q$ zu $\lambda \geqq \varphi$ gehört, gehört also auch $\mathfrak{a}$ zu $\lambda$.

Ist umgekehrt $\mathfrak{a}$ eine Stelle aus $\lambda$, so sei $\mathfrak{A}$ die Matrix, deren erste Spalte die Stelle $\mathfrak{a}$ ist, und die sonst nur Nullen enthält. Sie ist auf jede Stelle, also auch auf jede Stelle $\mathfrak{x}$ von $\lambda$ anwendbar und führt sie in $x_1\mathfrak{a}$ über, die wiederum $\lambda$ angehört. Also gehört $\mathfrak{A}$ zu $\Sigma(\lambda)$, $\mathfrak{a}$ gehört zum Spaltenraum.

**Satz 2.** *Ist $\lambda \geqq \varphi$, so ist analog der Zeilenraum von $\Sigma(\lambda)$ identisch mit $\lambda^*$.*

Denn ist $\mathfrak{b}$ eine Zeile einer Matrix $\mathfrak{B}$ von $\Sigma(\lambda)$, etwa die $p$-te Zeile, so folgt aus der Anwendbarkeit von $\mathfrak{B}$ auf alle $\mathfrak{x}$ von $\lambda$, daß $\mathfrak{b}\mathfrak{x}$ für alle $\mathfrak{x}$ aus $\lambda$ absolut konvergiert, d. h. $\mathfrak{b}$ in $\lambda^*$.

Ist umgekehrt $\mathfrak{b}$ eine Stelle von $\lambda^*$, so sei $\mathfrak{B}$ die Matrix, deren erste Zeile die Stelle $\mathfrak{b}$ ist und die sonst nur Nullen enthält. Sie ist offenbar auf jede Stelle von $\lambda$ anwendbar und führt sie in $(\mathfrak{b}\mathfrak{x}, 0, 0, \ldots)$ über; da $\lambda \geqq \varphi$, ist diese Stelle jedenfalls in $\lambda$ enthalten, also $\mathfrak{B}$ in $\Sigma(\lambda)$.

**Definition 2.** *Eine Menge von unendlichen Matrizen $\mathfrak{A} = (a_{pq})$, $p, q = 1, 2, 3, \ldots$, heiße ein Matrizenring, wenn für je zwei Matrizen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ der Menge die Summen $\sum_{\alpha=1}^{\infty} a_{p\alpha} b_{\alpha q}$ alle absolut konvergieren, wenn Summe und Produkt zweier Matrizen der Menge wiederum der Menge angehören und wenn die Regeln der Addition, das assoziative Gesetz der Multiplikation und die distributiven Gesetze gelten.*

*$\Sigma(\lambda)$ ist nicht für jedes $\lambda \geqq \varphi$ ein Ring.* Dies lehrt das Beispiel des Raumes $\vartheta$ der fastkonstanten Stellen, d. h. der Stellen $(c_1, \ldots, c_n, c, c, \ldots) = c\mathfrak{d} + \mathfrak{f}$, wo $\mathfrak{d} = (1, 1, \ldots)$, $\mathfrak{f}$ eine Stelle aus $\varphi$ bedeutet. Man sieht leicht, daß $\vartheta^*$ der Raum der Stellen mit absolut-konvergenter Summe ist (in § 13 wird daraus folgen, daß $\vartheta^* = \sigma_1$, $\vartheta^{**} = \sigma_\infty$ ist, woraus direkt hervorgeht, daß $\vartheta$ *nicht* vollkommen ist; er ist nicht einmal normal). $\Sigma(\vartheta)$ besteht aus denjenigen Matrizen $\mathfrak{A}$, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

1) $A_p = a_{p1} + a_{p2} + \cdots$ konvergiert absolut für $p = 1, 2, \ldots$,

2) die Stelle $(A_1, A_2, \ldots)$ ist eine Stelle von $\vartheta$,

3) die Spalten von $\mathfrak{A}$ sind Stellen aus $\vartheta$.

Und zwar sind die beiden ersten Bedingungen notwendig, damit $\mathfrak{d}$ in eine Stelle von $\vartheta$ übergeht, die dritte, damit jede finite Stelle es tut, und alles zusammen ist dann auch hinreichend, da alle Stellen von $\vartheta$ sich aus $\mathfrak{d}$ und finiten Stellen $\mathfrak{f}$ linear zusammensetzen.

Die beiden Matrizen

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} b_1 & -b_1 & 0 & \cdot \\ 0 & b_2 & -b_2 & \cdot \\ 0 & 0 & b_3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

gehören also dann und nur dann zu $\Sigma(\vartheta)$, wenn $\Sigma |a_n|$ konvergiert; bei $\mathfrak{B}$ ist keinerlei Einschränkung mehr nötig. Die erste Zeile von $\mathfrak{AB}$ lautet:

$$a_1 b_1, \quad -a_1 b_1 + a_2 b_2, \quad -a_2 b_2 + a_3 b_3, \quad \ldots;$$

ist also etwa $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = n^3$, so ist $a_n b_n = n$ und die Summe der Beträge der ersten Zeile von $\mathfrak{AB}$ lautet: $1 + 1 + 1 + \cdots$, divergiert also, so daß $\mathfrak{AB}$ die Forderung 1) nicht erfüllt und $\Sigma(\vartheta)$ nicht angehört [17]).

**Satz 3 (Transformationstheorem).** *Ist $\lambda$ vollkommen, so ist $\Sigma(\lambda)$ ein Matrizenring.*

Sei $\mathfrak{A}$ eine Matrix aus $\Sigma(\lambda)$ und $\mathfrak{x}$ eine Stelle aus $\lambda$, $\mathfrak{u}$ eine Stelle aus $\lambda^*$, so ist $\mathfrak{A}\mathfrak{x}$ selbst wieder eine Stelle aus $\lambda$, und daher existiert $\mathfrak{u}(\mathfrak{A}\mathfrak{x})$. Sei $\mathfrak{a}^{(n)} = (a_{n1}, a_{n2}, \ldots)$ die $n$-te Zeile der Matrix $\mathfrak{A}$ und sei $\mathfrak{v}^{(n)} = u_1 \mathfrak{a}^{(1)} + \cdots + u_n \mathfrak{a}^{(n)}$, so ist $\mathfrak{v}^{(n)}$ nach Satz 2 eine lineare Kombination endlich vieler Stellen aus $\lambda^*$, also selbst in $\lambda^*$ gelegen. Die Folge $\mathfrak{v}^{(n)}$ ist konvergent; denn $\mathfrak{v}^{(n)}\mathfrak{x} = u_1(\mathfrak{a}^{(1)}\mathfrak{x}) + \cdots + u_n(\mathfrak{a}^{(n)}\mathfrak{x})$ ist die Summe der $n$ ersten Zeilen der Doppelreihe $\Sigma a_{pq} u_p x_q$ oder, anders ausgedrückt, die $n$-te Partialsumme von $\mathfrak{u}(\mathfrak{A}\mathfrak{x})$; also ist $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{v}^{(n)}\mathfrak{x}$ für jedes $\mathfrak{x}$ aus $\lambda$ vorhanden und $= \mathfrak{u}(\mathfrak{A}\mathfrak{x})$.

Da $\lambda^*$ nach § 3, Satz 5 vollständig ist, hat die konvergente Folge $\mathfrak{v}^{(n)}$ in $\lambda^*$ einen Limes, $\mathfrak{v} = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{v}^{(n)}$, und es ist $\mathfrak{v}\mathfrak{x} = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{v}^{(n)}\mathfrak{x} = \mathfrak{u}(\mathfrak{A}\mathfrak{x})$. Für $\mathfrak{x} = \mathfrak{e}_p$ speziell gilt also $v_p = \sum_{i=1}^{\infty} u_i a_{ip}$, und zwar sind diese Summen nach Satz 1 absolut konvergent, d. h. es ist $\mathfrak{v} = \mathfrak{u}\mathfrak{A}$, mithin $\mathfrak{v}\mathfrak{x} = (\mathfrak{u}\mathfrak{A})\mathfrak{x}$. Aus allem zusammen folgt $\mathfrak{u}(\mathfrak{A}\mathfrak{x}) = (\mathfrak{u}\mathfrak{A})\mathfrak{x}$.

---

[17]) Dieses Beispiel hat Fräulein E. Hagemann in einer geringen Modifikation für dasjenige $\Sigma(\vartheta)$ gebildet, das auf der Grundlage nicht absoluter, sondern gewöhnlicher Konvergenz für die skalaren Produkte verstanden ist (vgl. dazu § 16).

Sind nun $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ irgend zwei Matrizen aus $\Sigma(\lambda)$, so existiert nach Satz 1 und 2 das Produkt $\mathfrak{AB}$, und $\mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{x})$ ist eine Stelle aus $\lambda$. Aus dem eben Bewiesenen geht aber Zeile für Zeile hervor, daß $\mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{x}) = (\mathfrak{AB})\mathfrak{x}$ ist. Also existiert $(\mathfrak{AB})\mathfrak{x}$ für alle $\mathfrak{x}$ aus $\lambda$ im Sinne absoluter Konvergenz und liegt selbst stets in $\lambda$, d. h. $\mathfrak{AB}$ ist eine Matrix aus $\Sigma(\lambda)$. Zugleich folgt $\mathfrak{A}(\mathfrak{BC}) = (\mathfrak{AB})\mathfrak{C}$ für irgend drei Matrizen aus $\Sigma(\lambda)$. Die übrigen Rechenregeln ergeben sich unmittelbar.

**Satz 4.** *Ist $\lambda$ vollkommen, so ist $\Sigma(\lambda^*)$ gleich der Gesamtheit $\Sigma'(\lambda)$ der zu den Matrizen von $\Sigma(\lambda)$ transponierten Matrizen.*

Denn nach Satz 2 ist der Zeilenraum von $\Sigma(\lambda)$ gleich $\lambda^*$; aus dem Beweis von Satz 3 ergibt sich, daß für alle $\mathfrak{u}$ aus $\lambda^*$ das $\mathfrak{uA}$ im Sinne absoluter Konvergenz existiert und $\lambda^*$ angehört. Das bedeutet aber, daß die zu $\mathfrak{A}$ transponierte Matrix $\mathfrak{A}'$ jedes $\mathfrak{u}$ aus $\lambda^*$ in eine Stelle von $\lambda^*$ transformiert, d. h. $\mathfrak{A}'$ gehört zu $\Sigma(\lambda^*)$, also $\Sigma'(\lambda) \leqq \Sigma(\lambda^*)$. Wendet man dieses Ergebnis auf $\lambda^*$ statt $\lambda$ an, so erhält man $\Sigma'(\lambda^*) \leqq \Sigma(\lambda)$ oder durch Übergang zu den transponierten Matrizen $\Sigma(\lambda^*) \leqq \Sigma'(\lambda)$, also $\Sigma(\lambda^*) = \Sigma'(\lambda)$.

**Satz 5.** *Sei $\lambda \geqq \varphi$ und sei $\mathsf{P}(\lambda)$ die Menge aller derjenigen Matrizen aus $\Sigma(\lambda)$, für die bei beliebigem $\mathfrak{x}$ aus $\lambda$ und $\mathfrak{u}$ aus $\lambda^*$ gilt $\mathfrak{u}(\mathfrak{A}\mathfrak{x}) = (\mathfrak{uA})\mathfrak{x}$, wobei alle auftretenden einfachen Summen absolut konvergent sind, so ist $\mathsf{P}(\lambda)$ ein Matrizenring, der $\lambda$ zum Spaltenraum, $\lambda^*$ zum Zeilenraum hat. Und zwar ist $\mathsf{P}(\lambda)$ der Durchschnitt von $\Sigma(\lambda)$ und $\Sigma(\lambda^{**})$.*

*Beweis.* Zuerst folgt aus $\mathfrak{u}(\mathfrak{A}\mathfrak{x}) = (\mathfrak{uA})\mathfrak{x}$, daß $\mathfrak{uA} = \mathfrak{v}$ stets in $\lambda^*$ liegt, wenn $\mathfrak{u}$ es tut; also transformiert $\mathfrak{A}'$ den Raum $\lambda^*$ in sich. Nach Satz 4 transformiert also $\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}$ den Raum $\lambda^{**}$ in sich, d. h. $\mathsf{P}(\lambda) \leqq \Sigma(\lambda^{**})$.

Ist umgekehrt $\mathfrak{A}$ eine Matrix von $\Sigma(\lambda)$, die zugleich zu $\Sigma(\lambda^{**})$ gehört, so gehört sie zu $\mathsf{P}(\lambda)$. Denn da $\lambda^{**}$ vollkommen ist, ist $\Sigma(\lambda^{**})$ nach Satz 3 ein Ring. Sind nun $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{u}$ Stellen von $\lambda$ bzw. $\lambda^*$, so sind sie auch Stellen von $\lambda^{**}$ bzw. $\lambda^{***}$. Also gilt $\mathfrak{u}(\mathfrak{A}\mathfrak{x}) = (\mathfrak{uA})\mathfrak{x}$ für jedes $\mathfrak{x}$ aus $\lambda$, $\mathfrak{u}$ aus $\lambda^*$ im Sinne absoluter Konvergenz, d. h. $\mathfrak{A}$ ist in $\mathsf{P}(\lambda)$. Also ist $\mathsf{P}(\lambda)$ der Durchschnitt von $\Sigma(\lambda)$ und $\Sigma(\lambda^{**})$.

Ferner ist $\mathsf{P}(\lambda)$ ein Ring. Denn da $\mathsf{P}(\lambda)$ ein Teil von $\Sigma(\lambda^{**})$ ist, gilt für irgend zwei Matrizen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ aus $\mathsf{P}$, eine Stelle $\mathfrak{x}$ aus $\lambda$ und eine Stelle $\mathfrak{u}$ aus $\lambda^*$: $\mathfrak{u}[(\mathfrak{AB})\mathfrak{x}] = [\mathfrak{u}(\mathfrak{AB})]\mathfrak{x}$ im Sinne absoluter Konvergenz, d. h. $\mathfrak{AB}$ gehört auch zu $\mathsf{P}(\lambda)$.

Endlich ist $\lambda$ der Spaltenraum von $\mathsf{P}(\lambda)$. Denn die Matrix, deren erste Spalte irgendeine Stelle aus $\lambda$ ist und die sonst nur Nullen enthält, gehört $\mathsf{P}(\lambda)$ an, wie man unmittelbar nachrechnet. Entsprechendes gilt vom Zeilenraum.

Dieser Satz gilt allgemeiner, wenn man $\mathfrak{u}$ nicht als Stelle von $\lambda^*$, sondern irgendeines Teilraums $\mu$ von $\lambda^*$ voraussetzt:

**Satz 5 a.** *Ist $\lambda \geqq \varphi$, $\varphi \leqq \mu \leqq \lambda^*$, so bildet die Menge $\mathsf{T}$ aller Matrizen $\mathfrak{A}$, die selbst $\Sigma(\lambda)$ angehören, während zugleich ihre transponierten Matrizen $\mathfrak{A}'$ zu $\Sigma(\mu)$ gehören, und für die bei jedem $\mathfrak{x}$ aus $\lambda$ und $\mathfrak{u}$ aus $\mu$ stets $\mathfrak{u}(\mathfrak{A}\mathfrak{x}) = (\mathfrak{uA})\mathfrak{x}$ gilt, einen Matrizenring, der $\lambda$ zum Spaltenraum, $\mu$ zum Zeilenraum hat.*

**Definition 3.** *Eine lineare Transformation, d. h. eine Transformation $\mathfrak{y} = \mathfrak{T}(\mathfrak{x})$, die jeder Stelle $\mathfrak{x}$ aus $\lambda$ eine Stelle $\mathfrak{y}$ aus $\lambda$ zuordnet und zwar so, daß $\mathfrak{T}(r\mathfrak{x}) = r\mathfrak{T}(\mathfrak{x})$, $\mathfrak{T}(\mathfrak{x} + \mathfrak{x}') = \mathfrak{T}(\mathfrak{x}) + \mathfrak{T}(\mathfrak{x}')$ gilt, heiße stetig, wenn für jede Folge $\mathfrak{x}^{(n)}$ aus $\lambda$, die überhaupt einen Limes hat, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{T}(\mathfrak{x}^{(n)}) = \mathfrak{T}(\lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{x}^{(n)})$ gilt.*

Aus der Tatsache, daß jeder Folge mit Limes $\mathfrak{o}$ vermöge $\mathfrak{T}$ eine Folge mit Limes $\mathfrak{o}$ entspricht, entnimmt man übrigens leicht:

*Jede stetige lineare Transformation führt jede konvergente Folge von Stellen in eine ebensolche über.*

**Satz 6.** *Ist $\lambda$ vollkommen, so stellt jede Matrix $\mathfrak{A}$ aus $\Sigma(\lambda)$ eine stetige Transformation von $\lambda$ dar.*

Sei $\mathfrak{x}^{(n)}$ eine Folge aus $\lambda$ mit dem Limes $\mathfrak{x}$, so ist, da $\mathfrak{u}\mathfrak{A}$ nach Satz 4 für jedes $\mathfrak{u}$ aus $\lambda^*$ eine Stelle aus $\lambda^*$ ist, $\lim\limits_{n\to\infty}(\mathfrak{u}\mathfrak{A})\mathfrak{x}^{(n)} = (\mathfrak{u}\mathfrak{A})\mathfrak{x}$. Nach Satz 3 ist dies

$$= \lim_{n\to\infty}\mathfrak{u}(\mathfrak{A}\mathfrak{x}^{(n)}) = \mathfrak{u}(\mathfrak{A}\mathfrak{x}), \text{ d. h. } \lim_{n\to\infty}\mathfrak{A}\mathfrak{x}^{(n)} = \mathfrak{A}\mathfrak{x}.$$

**Satz 7.** *Jede lineare stetige Transformation $\mathfrak{T}$ eines normalen Raumes $\lambda \geqq \varphi$ wird durch eine Matrix $\mathfrak{A}$ aus $\Sigma(\lambda)$ vermittelt:* $\mathfrak{T}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{A}\mathfrak{x}$.

Denn sei $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{T}(\mathfrak{e}_i)$, so bilden wir die Matrix $\mathfrak{A}$, die die $\mathfrak{a}_i$ zu Spalten hat; dann ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{A}\mathfrak{e}_i$. Ist nun $\mathfrak{x}$ irgendeine Stelle aus $\lambda$, so ist nach § 3, Satz 2 $\mathfrak{x} = \lim\limits_{n\to\infty}\mathfrak{x}_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\mathfrak{e}_i\right)$, also wegen der vorausgesetzten Stetigkeit auch

$$\mathfrak{T}(\mathfrak{x}) = \lim_{n\to\infty}\mathfrak{T}(\mathfrak{x}_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} x_i\mathfrak{T}(\mathfrak{e}_i) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} x_i\mathfrak{a}_i = \lim_{n\to\infty}\mathfrak{A}\mathfrak{x}_n.$$

Da also die Folge $\mathfrak{A}\mathfrak{x}_1, \mathfrak{A}\mathfrak{x}_2, \ldots$ von Stellen aus $\lambda$ konvergiert, konvergiert sie nach § 3, Satz 1 auch koordinatenweise; die $i$-te Koordinate von $\mathfrak{A}\mathfrak{x}_n$ aber ist $\sum\limits_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha}x_\alpha$; also ist $\sum\limits_{\alpha=1}^{\infty} a_{i\alpha}x_\alpha$ konvergent. Daß es auch absolut konvergiert, folgt aus der Voraussetzung, daß $\lambda$ normal ist, daß also die Arcus der $x_\alpha$ beliebig abgeändert werden dürfen. Also ist $\mathfrak{A}$ auf jedes $\mathfrak{x}$ aus $\lambda$ anwendbar und $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{T}(\mathfrak{x})$. Daraus folgt implizite, daß $\mathfrak{A}\mathfrak{x}$ selbst immer wieder in $\lambda$ liegt, also $\mathfrak{A}$ zu $\Sigma(\lambda)$ gehört.

## § 7. Verschärfungen. Der Bilinearformensatz.

Wenn man die Hilfsmittel der §§ 4 und 5 heranzieht, kann man die Resultate von § 6 wesentlich verschärfen und vervollständigen.

Ziehen wir zunächst den Begriff der relativen Konvergenz (§ 4) heran, so bemerken wir, daß der Beweis von § 6, Satz 3 in Wahrheit auf der Voraussetzung beruht, daß $\lambda^*$ bezüglich $\lambda$ vollständig ist:

**Satz 1.** *Ist $\lambda \geqq \varphi$ und $\lambda^*$ vollständig bezüglich $\lambda$, so ist $\Sigma(\lambda)$ ein Matrizenring.*

In dieser Formulierung ist der Satz und sein Beweis rein formaler Natur. Setzt man $\lambda$ als vollkommen voraus, so ergibt der durchaus nicht formale Satz 5 von § 3 das Transformationstheorem (§ 6, Satz 3). Wendet man stattdessen den Satz 2 von § 4 an, der Satz 5 von § 3 verschärft, so erhält man:

**Satz 2.** *Ist $\lambda \geqq \varphi$ und normal, so ist $\Sigma(\lambda)$ ein Matrizenring.*

Es zeigt sich also, daß der Begriff der relativen Konvergenz zu Resultaten führt, in deren Formulierung dieser Begriff gar nicht eingeht. — Daß nicht für jeden Raum $\lambda \geqq \varphi$ der duale Raum $\lambda^*$ bezüglich $\lambda$ vollständig ist, lehrt wiederum das Beispiel des Raumes $\vartheta$ aus § 6. Wäre nämlich $\vartheta^*$ vollständig bezüglich $\vartheta$, so wäre nach Satz 1 $\Sigma(\vartheta)$ ein Ring, und das ist eben nicht der Fall.

Mit Satz 2 verschärfen sich nun ohne weiteres auch die Sätze 4 und 6 von § 6 zu folgenden:

**Satz 3.** *Ist $\lambda \geqq \varphi$ und normal, so ist $\Sigma'(\lambda) \leqq \Sigma(\lambda^*)$.*

**Satz 4.** *Ist $\lambda \geqq \varphi$ und normal, so stellt jede Matrix $\mathfrak{A}$ aus $\Sigma(\lambda)$ eine stetige Transformation von $\lambda$ dar.*

Erst in dieser Gestalt ist § 6, Satz 6 zur vollen Umkehrung von § 6, Satz 7 geworden.

Zieht man jetzt neben § 4 auch § 5 heran, so erhält man folgende weiteren Tatsachen:

**Satz 5.** *Ist $\lambda \geqq \varphi$ und normal, $\mathfrak{A}$ eine Transformation aus $\Sigma(\lambda)$, so führt sie jede beschränkte Menge von Stellen aus $\lambda$ in eine ebensolche über.*

Denn wegen $\mathfrak{u}(\mathfrak{A}\mathfrak{x}) = (\mathfrak{u}\mathfrak{A})\mathfrak{x}$, und weil $\mathfrak{u}\mathfrak{A}$ nach Satz 3 in $\lambda^*$ liegt, ist $|\mathfrak{u}(\mathfrak{A}\mathfrak{x})| \leqq r(\mathfrak{u}\mathfrak{A})$ für alle $\mathfrak{x}$ der beschränkten Menge $X$; also ist $|\mathfrak{u}\mathfrak{y}| \leqq r(\mathfrak{u}\mathfrak{A})$ für alle $\mathfrak{y} = \mathfrak{A}\mathfrak{x}$ der Bildmenge, d. h. diese ist beschränkt.

**Satz 6.** *Ist $\lambda \geqq \varphi$ und normal, so stellt jede Matrix $\mathfrak{A}$ aus $\Sigma(\lambda)$ eine im Sinn des starken Limes stetige Transformation dar.*

Der Beweis ist analog dem von § 6, Satz 6, unter Verwendung von Satz 5.

Das Analogon zu § 6, Satz 7 für starke Konvergenz braucht nicht zu gelten. Das ergibt sich unter Benutzung von § 13 aus der analogen Bemerkung von Hausdorff [5]) pag. 305.

**Satz 7 (Bilinearformensatz).** *Ist $\lambda \geqq \varphi$ und normal, $\mathfrak{A}$ eine Matrix aus $\Sigma(\lambda)$ und durchläuft $\mathfrak{x}$ eine beschränkte Menge $X$ von $\lambda$, $\mathfrak{u}$ eine beschränkte Menge $U$ von $\lambda^*$, so ist $|\mathfrak{u}\mathfrak{A}\mathfrak{x}| \leqq m(X, U)$.*

Denn nach Satz 5 beschreibt $\mathfrak{y} = \mathfrak{A}\mathfrak{x}$ selbst eine beschränkte Menge $Y$, während $\mathfrak{x}$ die Menge $X$ durchläuft. Nach § 5, Satz 1 ist aber $|\mathfrak{u}\mathfrak{y}| \leqq r(Y, U)$, also $|\mathfrak{u}\mathfrak{A}\mathfrak{x}| \leqq m(X, U)$.

## § 8. Homöomorphe Räume.

**Definition 1.** *Eine lineare Transformation $\mathfrak{y} = \mathfrak{T}(\mathfrak{x})$ eines linearen Raumes $\lambda$ in einen linearen Raum $\mu$ heiße stetig, wenn $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{T}(\mathfrak{x}^{(n)}) = \mathfrak{T}(\lim_{n\to\infty} \mathfrak{x}^{(n)})$ gilt für jede Folge $\mathfrak{x}^{(n)}$ aus $\lambda$, die einen Limes hat.*

**Satz 1.** *Jede lineare stetige Transformation $\mathfrak{T}$ eines normalen Raumes $\lambda \geqq \varphi$ in einen normalen Raum $\mu$ wird durch eine Matrix $\mathfrak{P}$ vermittelt: $\mathfrak{T}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{P}\mathfrak{x}$, wobei alle auftretenden Reihen absolut konvergieren.*

Der Beweis ist wörtlich der von § 6, Satz 7.

**Satz 2 (Erweitertes Transformationstheorem).** *Jede Matrix $\mathfrak{P}$, die auf alle Stellen eines normalen Raumes $\lambda \geqq \varphi$ anwendbar ist und ihn in Stellen eines anderen normalen Raumes $\mu \geqq \varphi$ überführt, vermittelt eine stetige lineare Transformation $\mathfrak{T}$.*

Zum Beweise zeige man genau wie bei dem von § 6, Satz 3 (Transformationstheorem) bzw. § 7, Satz 1: $\mathfrak{u}(\mathfrak{P}\mathfrak{x}) = (\mathfrak{u}\mathfrak{P})\mathfrak{x}$ für jedes $\mathfrak{u}$ aus $\mu^*$ und jedes $\mathfrak{x}$ aus $\lambda$. Daraus leitet man genau wie beim Beweise von § 6, Satz 6 bzw. § 7, Satz 6 die Stetigkeit der Transformation ab.

**Satz 3 (Erweiterter Bilinearformensatz).** *Seien $\lambda \geqq \varphi$ und $\mu \geqq \varphi$ beide normal, $\mathfrak{A}$ eine Matrix, die auf alle Stellen von $\lambda$ anwendbar ist und sie in Stellen aus $\mu$ überführt, und gehört $\mathfrak{x}$ zu einer beschränkten Menge $X$ aus $\lambda$, $\mathfrak{v}$ zu einer beschränkten Menge $V$ aus $\mu^*$, so ist $|\mathfrak{v}\mathfrak{A}\mathfrak{x}| \leqq m(X, V)$.*

Folgt aus Satz 2 analog wie in § 7 der Bilinearformensatz aus dem Transformationstheorem.

**Definition 2.** *Zwei lineare Räume $\lambda$, $\mu$ sollen homöomorph heißen, wenn es eine lineare stetige Transformation $\mathfrak{y} = \mathfrak{T}(\mathfrak{x})$ von $\lambda$ in $\mu$ und eine andere ebensolche $\mathfrak{x} = \mathfrak{T}^{-1}(\mathfrak{y})$ von $\mu$ in $\lambda$ gibt, für die $\mathfrak{T}^{-1}(\mathfrak{T}(\mathfrak{x})) = \mathfrak{x}$ für alle $\mathfrak{x}$ aus $\lambda$ und $\mathfrak{T}(\mathfrak{T}^{-1}(\mathfrak{y})) = \mathfrak{y}$ für alle $\mathfrak{y}$ aus $\mu$ gilt.*

**Satz 4.** *Sind zwei normale Räume $\lambda \geqq \varphi$, $\mu \geqq \varphi$ homöomorph und heißen die Matrizen, die gemäß Satz 1 die Transformationen $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}^{-1}$ vermitteln, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}^{-1}$, so gilt $\mathfrak{P}\mathfrak{P}^{-1} = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{P} = \mathfrak{E}$, und die dabei auftretenden Summen sind absolut konvergent.*

Es gilt nämlich für jedes $\mathfrak{x}$ aus $\lambda$

$$\mathfrak{P}^{-1}(\mathfrak{P}\mathfrak{x}) = \mathfrak{P}^{-1}(\mathfrak{T}(\mathfrak{x})) = \mathfrak{T}^{-1}(\mathfrak{T}(\mathfrak{x})) = \mathfrak{x};$$

für $\mathfrak{x} = \mathfrak{e}_k$ speziell besagt es $\mathfrak{P}^{-1}(\mathfrak{P}\mathfrak{e}_k) = \mathfrak{e}_k$, d. h. $\mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{P} = \mathfrak{E}$. Ebenso folgt $\mathfrak{P}\mathfrak{P}^{-1} = \mathfrak{E}$.

Analog ergibt sich der allgemeinere Satz:

**Satz 4a.** *Sei der normale Raum $\lambda \geqq \varphi$ homöomorph dem normalen Raum $\mu \geqq \varphi$, dieser homöomorph dem normalen Raum $\nu \geqq \varphi$. Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Matrizen, die diese Homöomorphien vermitteln, und ist $\mathfrak{C}$ die Matrix, die die zusammengesetzte Homöomorphie von $\lambda$ auf $\nu$ vermittelt, so gilt $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$ und alle dabei auftretenden Reihen konvergieren absolut.*

**Satz 5.** *Die Homöomorphie* $\mathfrak{y} = \mathfrak{T}(\mathfrak{x})$ *zwischen* $\lambda$ *und* $\mu$ *(normal,* $\geqq \varphi$*) induziert eine andere Homöomorphie* $\mathfrak{v} = \mathfrak{T}^*(\mathfrak{u})$ *zwischen den Stellen* $\mathfrak{u}$ *von* $\lambda^*$ *und* $\mathfrak{v}$ *von* $\mu^*$*; sind* $\mathfrak{Q}$ *und* $\mathfrak{Q}^{-1}$ *die Matrizen, die* $\mathfrak{T}^*$ *und* $(\mathfrak{T}^*)^{-1}$ *vermitteln, so ist* $\mathfrak{P}^{-1} = \mathfrak{Q}'$, $\mathfrak{Q}^{-1} = \mathfrak{P}'$.

Ist nämlich $\mathfrak{u}$ eine Stelle aus $\lambda^*$, so definiert $\sum_{i=1}^{\infty} u_i x_i$ für alle $\mathfrak{x}$ aus $\lambda$ nach § 3, Satz 6 eine stetige Linearfunktion $u(\mathfrak{x})$; vermöge der Transformation $\mathfrak{y} = \mathfrak{T}(\mathfrak{x})$ geht diese in die stetige Linearfunktion $u(\mathfrak{x}) = u(\mathfrak{T}^{-1}(\mathfrak{y})) = v(\mathfrak{y})$ im Raum $\mu$ über, und eine solche ist nach der anderen Hälfte des eben angezogenen Satzes durch eine Linearform $\sum_{i=1}^{\infty} v_i y_i$ gegeben und damit eine Stelle $\mathfrak{v}$ in $\mu^*$; es gilt $\mathfrak{v}\mathfrak{y} = \mathfrak{u}\mathfrak{x}$. Ebenso sind auch die dualen Räume $\lambda^*$, $\mu^*$ eineindeutig aufeinander bezogen; die Transformationen mögen $\mathfrak{T}^*$, $(\mathfrak{T}^*)^{-1}$ heißen. Die Beziehung ist auch beiderseits stetig. Denn ist $\mathfrak{u}^{(n)}$ eine Folge aus $\lambda^*$ mit dem limes $\mathfrak{u}$, und ist $\mathfrak{v}^{(n)} = \mathfrak{T}^*(\mathfrak{u}^{(n)})$, $\mathfrak{v} = \mathfrak{T}^*(\mathfrak{u})$, so ist $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{u}^{(n)}\mathfrak{x} = \mathfrak{u}\mathfrak{x}$ und, wenn $\mathfrak{y} = \mathfrak{T}(\mathfrak{x})$ ist, $\mathfrak{u}^{(n)}\mathfrak{x} = \mathfrak{v}^{(n)}\mathfrak{y}$ gemäß der Definition der $\mathfrak{v}^{(n)}$, also $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{v}^{(n)}\mathfrak{y} = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{u}^{(n)}\mathfrak{x} = \mathfrak{u}\mathfrak{x} = \mathfrak{v}\mathfrak{y}$, d. h. $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{v}^{(n)} = \mathfrak{v}$. Also sind $\lambda^*$ und $\mu^*$ aufeinander homöomorph bezogen.

Aus $\mathfrak{y} = \mathfrak{T}(\mathfrak{x})$ und $\mathfrak{v} = \mathfrak{T}^*(\mathfrak{u})$ folgt beim Übergang zu Matrizen: $\mathfrak{y} = \mathfrak{P}\mathfrak{x}$, $\mathfrak{v} = \mathfrak{u}\mathfrak{Q}'$ [18]). Wegen $\mathfrak{u}\mathfrak{x} = \mathfrak{v}\mathfrak{y}$ folgt daraus $\mathfrak{u}\mathfrak{x} = (\mathfrak{u}\mathfrak{Q}')(\mathfrak{P}\mathfrak{x})$. In dieser Relation setzen wir für $\mathfrak{x}$ der Reihe nach die Spalten von $\mathfrak{P}^{-1}$ ein, die als Bilder der Stellen $\mathfrak{e}_i$ des $\mu$ in $\lambda$ liegen. Alle diese Relationen fassen sich in der Matrizenrelation $\mathfrak{u}\mathfrak{P}^{-1} = (\mathfrak{u}\mathfrak{Q}')(\mathfrak{P}\mathfrak{P}^{-1})$ zusammen; nach Satz 4 folgt $\mathfrak{u}\mathfrak{P}^{-1} = \mathfrak{u}\mathfrak{Q}'$ für jedes $\mathfrak{u}$ aus $\lambda^*$; speziell für $\mathfrak{u} = \mathfrak{e}_i$ ergibt das $\mathfrak{P}^{-1} = \mathfrak{Q}'$.

Vertauscht man $\lambda$ mit $\mu$, so vertauscht sich $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{P}^{-1}$, $\mathfrak{Q}$ mit $\mathfrak{Q}^{-1}$, und man hat $\mathfrak{P} = (\mathfrak{Q}^{-1})'$ oder $\mathfrak{Q}^{-1} = \mathfrak{P}'$.

**Folgerung 1.** *Die Spalten von* $\mathfrak{P}$ *sind Stellen von* $\mu$*, die Zeilen von* $\mathfrak{P}$ *sind Stellen von* $\lambda^*$*, die Spalten von* $\mathfrak{Q}$ *sind Stellen von* $\mu^*$*, die Zeilen von* $\mathfrak{Q}$ *sind Stellen von* $\lambda$*.*

**Folgerung 2.** *Die Matrizen* $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}^{-1}$ *vermitteln eine homöomorphe Beziehung zwischen* $\lambda^{**}$ *und* $\mu^{**}$*, die die ursprüngliche Homöomorphie zwischen* $\lambda$ *und* $\mu$ *enthält und in der einzig möglichen Art auf die vollkommenen Hüllen ausdehnt.*

**Satz 6.** *Sind zwei normale Räume* $\lambda \geqq \varphi$, $\mu \geqq \varphi$ *homöomorph,* $\mu = \mathfrak{P}(\lambda)$, $\lambda = \mathfrak{P}^{-1}(\mu)$*, so sind die zugehörigen Matrizenringe* $\Sigma(\lambda)$ *und* $\Sigma(\mu)$ *isomorph, und es ist* $\mathfrak{P}^{-1}\Sigma(\mu)\mathfrak{P} = \Sigma(\lambda)$, $\mathfrak{P}\Sigma(\lambda)\mathfrak{P}^{-1} = \Sigma(\mu)$.

Für die abstrakten Transformationen, die von diesen Matrizen vermittelt werden, ist alles unmittelbar klar. Für die Matrizen folgt daraus, wenn $\mathfrak{A}$ irgendeine Transformation von $\lambda$ in sich darstellt und $\mathfrak{B}$ die homöomorph-entsprechende von $\mu$ in sich ist, $\mathfrak{B}\mathfrak{y} = \mathfrak{P}(\mathfrak{A}(\mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{y}))$. Satz 2 und sein Beweis erlauben, angewendet auf $\mathfrak{P}^{-1}$ statt $\mathfrak{P}$, die inneren Klammern umzusetzen: $\mathfrak{B}\mathfrak{y} = \mathfrak{P}((\mathfrak{A}\mathfrak{P}^{-1})\mathfrak{y})$; auf $(\mathfrak{A}\mathfrak{P}^{-1})$ statt $\mathfrak{P}$ angewendet, ergibt derselbe Schluß $\mathfrak{B}\mathfrak{y} = (\mathfrak{P}(\mathfrak{A}\mathfrak{P}^{-1}))\mathfrak{y}$; endlich folgt aus § 7, Satz 2 (also dem Transformationstheorem für normale Räume) in Verbindung mit der Folgerung 1 von Satz 5, daß die letzten inneren Klammern versetzt werden können: $\mathfrak{B}\mathfrak{y} = ((\mathfrak{P}\mathfrak{A})\mathfrak{P}^{-1})\mathfrak{y}$. Also ist $\mathfrak{B} = \mathfrak{P}(\mathfrak{A}\mathfrak{P}^{-1}) = (\mathfrak{P}\mathfrak{A})\mathfrak{P}^{-1}$.

Es gilt umgekehrt: *Sind zwei vollkommene Matrizenringe* (vgl. § 9, Definition 2) *isomorph, so sind die zugehörigen Räume homöomorph.* Dies zu beweisen, ohne daß man die Stetigkeit der Isomorphie voraussetzt, erfordert

[18]) Insofern man Stellen (Vektoren) als einspaltige Matrizen ansieht, wäre es konsequenter, $\mathfrak{u}'$ statt $\mathfrak{u}$ zu schreiben und dadurch anzudeuten, daß $\mathfrak{u}'$ eine einzeilige Matrix ist, die mit der einspaltigen Matrix $\mathfrak{x}$ zu der einreihigen Matrix $\mathfrak{u}'\mathfrak{x}$ komponiert wird. Der größeren Konsequenz im Rahmen des vorliegenden Paragraphen hätte aber eine lästige Akzentuierung durch die ganze Arbeit hindurch gegenübergestanden.

diejenigen Methoden, die Herr A. Weber in der anschließenden Arbeit benutzt hat, um eine Reihe von Sätzen über Isomorphie von Matrizenringen zu beweisen, die über die hier entwickelte Theorie der *vollkommenen* Matrizenringe wesentlich hinausgreifen und von maximalen Matrizenringen (vgl. § 9, Definition 1) überhaupt handeln.

**Satz 7.** *Ist von zwei homöomorphen Räumen der eine $\lambda$ vollkommen, der andere $\mu \geqq \varphi$, so ist auch $\mu$ vollkommen.*

Die Bemerkung zu § 6, Def. 3 ergibt, daß jeder konvergenten Folge in $\mu$ eine ebensolche in $\lambda$ entspricht. Da $\lambda$ vollkommen ist, hat diese Folge einen Limes. Wegen der umkehrbaren Eindeutigkeit und Stetigkeit der Homöomorphie hat dann aber auch die Ausgangsfolge in $\mu$ einen Limes, d. h. $\mu$ ist vollständig, und da es $\geqq \varphi$ ist, vollkommen (§ 3, Satz 3).

**Satz 8.** *Sind zwei normale Räume $\lambda \geqq \varphi$, $\mu \geqq \varphi$ homöomorph, so sind sie auch homöomorph im Sinne der starken Konvergenz.*

Denn das Produkt $u\mathfrak{x}$ ist für irgendwelche $\mathfrak{x}$ aus $\lambda$, u aus $\lambda^*$ gleich dem Produkt $\mathfrak{v}\mathfrak{y}$ der entsprechenden Stellen aus $\mu$ und $\mu^*$. Daher gehen beschränkte Mengen von $\lambda$ in beschränkte Mengen von $\mu$ über; ebenso für $\lambda^*$ und $\mu^*$; und infolgedessen entsprechen stark-konvergenten Folgen in $\lambda$ ebensolche in $\mu$.

**Satz 9.** *$\varphi$ und $\omega$ sind keinem anderen Raum $\lambda \geqq \varphi$ homöomorph als sich selbst.*

Wäre $\omega$ homöomorph zu $\lambda$, so wäre $\lambda$ nach Satz 7 vollkommen, und es wäre daher nach Satz 1 eine Matrix $\mathfrak{P}$ vorhanden, die die Homöomorphie vermittelt, $\lambda = \mathfrak{P}(\omega)$. Die Zeilen von $\mathfrak{P}$ würden nach Satz 5, Folgerung 1 in $\omega^* = \varphi$ liegen, d. h. finit sein; $\mathfrak{P}$ wäre also zeilenfinit. Wenn aber eine zeilenfinite Matrix den Raum $\omega$ nicht eineindeutig auf das ganze $\omega$ abbildet, so müssen nach O. Toeplitz (Pal. Rend. **28**, 1909, pag. 88—96) die homogenen Gleichungen $\mathfrak{P}\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ oder $u\mathfrak{P} = \mathfrak{o}$ lösbar sein, was mit $\mathfrak{P}\mathfrak{P}^{-1} = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{P} = \mathfrak{E}$ nicht vereinbar ist.

Ist endlich $\varphi$ homöomorph zu $\mu$, so ist (nach Satz 5) $\varphi^*$ homöomorph zu $\mu^*$ oder $\omega$ homöomorph zu $\mu^*$, also $\mu^* = \omega$, $\mu = \omega^* = \varphi$.

## § 9. Maximale Matrizenringe.

**Definition 1.** *Ein Matrizenring* M *heiße maximal, wenn er nicht echter Teil eines anderen Matrizenringes ist.*

**Satz 1.** *Ist $\lambda$ vollkommen, so ist $\Sigma(\lambda)$ maximal.*

Wäre $\Sigma(\lambda)$ nicht maximal, so wäre es echter Teil eines anderen Matrizenringes M. Der Spaltenraum von M könnte nicht größer sein als $\lambda$, da jede Zeile einer Matrix von $\Sigma(\lambda)$ mit jeder Spalte einer Matrix aus M im Sinne absoluter Konvergenz komponierbar sein muß und der Zeilenraum von $\Sigma(\lambda)$ nach § 6, Satz 2 gleich $\lambda^*$ ist. Der Spaltenraum von M ist also genau $\lambda$. Nun folgt aus der Ringeigenschaft von M sofort, daß jede Matrix von M den Spaltenraum von M, also $\lambda$, in sich transformiert; also gehören alle Matrizen von M zu $\Sigma(\lambda)$, $\mathsf{M} = \Sigma(\lambda)$.

**Satz 2.** *Jeder maximale Matrizenring enthält die Matrizen $r\mathfrak{E}$.*

Zum Beweise bilde man das System N aller Matrizen $r\mathfrak{E} + r_1\mathfrak{A}_1 + \cdots + r_k\mathfrak{A}_k$, wo $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_k$ irgendwelche Matrizen aus M sind, $k$ *nicht* fest. Man sieht leicht, daß auch N ein Matrizenring ist. Da M maximal und $\leqq$ N ist, ist M = N und M enthält alle $r\mathfrak{E}$.

**Satz 3.** *Jeder maximale Matrizenring enthält alle endlichen Matrizen, d. h. alle Matrizen, unter deren Koeffizienten nur endlichviele Nichtnullen auftreten.*

Sei nämlich $\mathfrak{C}_{pq}$ diejenige Matrix, bei der $c_{pq} = 1$, alle anderen Koeffizienten 0 sind, so ist $\mathfrak{C}_{pq}\mathfrak{A}$ die Matrix, die die $q$-te Zeile von $\mathfrak{A}$ als $p$-te Zeile enthält, sonst nur Nullen, $\mathfrak{B}\mathfrak{C}_{pq}$ die Matrix, die die $p$-te Spalte von $\mathfrak{B}$ als $q$-te Spalte enthält, sonst nur Nullen; durch Ausrechnen ergibt sich daraus sofort, daß $(\mathfrak{B}\mathfrak{C}_{pq})\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}(\mathfrak{C}_{pq}\mathfrak{A})$ eine und

dieselbe Matrix sind, nämlich $(b_{ip}\, a_{qk})$ — da $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ bisher keinerlei Einschränkungen unterworfen waren, versteht sich dies nicht von selbst.

Sei nun $\mathsf{N}_{pq}$ das System aller Matrizen der Form $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}_1 \mathfrak{C}_{pq} \mathfrak{A}_1 + \cdots + \mathfrak{B}_k \mathfrak{C}_{pq} \mathfrak{A}_k$ bei festem $p$ und $q$, wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{B}_i$ irgendwelche Matrizen aus $\mathsf{M}$ sind, $k$ beliebig, so ist auch $\mathsf{N}_{pq}$ ein Ring, wie man leicht ausführt. Ist also $\mathsf{M}$ maximal, so enthält es alle $\mathfrak{C}_{pq}$, und somit alle endlichen Matrizen als lineare Kombinationen von endlichvielen $\mathfrak{C}_{pq}$.

**Zusatz.** *Die Spalten aller Matrizen eines maximalen Matrizenringes* $\mathsf{M}$ *bilden einen linearen Raum, seinen Spaltenraum* $\sigma$, *ebenso die Zeilen seinen Zeilenraum* $\zeta$, *und es ist* $\varphi \leqq \zeta \leqq \sigma^*$, $\varphi \leqq \sigma \leqq \zeta^*$, $\mathsf{M} \leqq \Sigma(\sigma)$, $\mathsf{M}' \leqq \Sigma(\zeta)$.

**Definition 2.** *Ein maximaler Matrizenring heiße vollkommen, wenn sein Spaltenraum vollkommen ist.*

**Satz 4.** *Jeder vollkommene Matrizenring* $\mathsf{M}$ *ist* $= \Sigma(\sigma)$, *wo* $\sigma$ *sein Spaltenraum ist, und es ist* $\sigma^* = \zeta$, $\zeta^* = \sigma$, *wo* $\zeta$ *der Zeilenraum von* $\mathsf{M}$ *ist. Mit* $\mathsf{M}$ *ist also stets auch der transponierte Matrizenring* $\mathsf{M}' = \Sigma(\zeta)$ *vollkommen.*

Aus der Maximalität folgt nämlich, wie schon früher bemerkt, daß jede Matrix aus $\mathsf{M}$ den Spaltenraum $\sigma$ in sich überführt; also ist $\mathsf{M} \leqq \Sigma(\sigma)$. Wenn $\sigma$ vollkommen ist, ist aber $\Sigma(\sigma)$ ein Matrizenring. Soll $\mathsf{M}$ maximal sein, so muß $\mathsf{M} = \Sigma(\sigma)$ sein. § 6, Satz 2 ergibt, daß $\zeta = \sigma$ ist, woraus $\zeta^* = \sigma^{**} = \sigma$ folgt.

*Die Frage, ob jeder maximale Matrizenring vollkommen ist, ist zu verneinen. Das Beispiel, das wir dafür unter Benutzung der Wohlordnung konstruieren werden, zeigt zugleich, daß bei einem maximalen Matrizenring* $\zeta$ *und* $\sigma$ *nicht zueinander dual zu sein brauchen.* Zugleich erhalten wir hierbei einen Raum $\lambda$, dessen $\Sigma(\lambda)$ kein Ring ist, wofür oben (§ 6) bereits ein wesentlich einfacheres Beispiel angegeben wurde.

1. Die Matrizen von folgendem Typus ($g$, $g'$ ganze Zahlen; $a, b, \ldots, a', b', \ldots$ komplexe Zahlen) bilden einen Ring:

$$\mathfrak{A} = \left(\begin{array}{c|ccccc|cc|c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & -b' & b' & -a' & a' & g' & 0 & 0 & \cdot \\ \hline \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right).$$

Daß Summe und Produkt zweier Matrizen dieser Art wieder diese Form haben, rechnet man leicht aus; die Rechenregeln gelten, weil die Matrizen alle halbfinit sind (vgl. J. f. Math. **165**, 1931).

Sei ferner

$$\mathfrak{C} = \left(\begin{array}{cc|cccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \hline \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right),$$

so ist $\mathfrak{A}\mathfrak{C} = \mathfrak{C}\mathfrak{A} = \mathfrak{O}$, $\mathfrak{C}^2 = \mathfrak{O}$. Alle Matrizen der Form $\mathfrak{A} + r\mathfrak{C}$ bilden also ebenfalls einen Matrizenring $\mathsf{P}$.

2. *Jeder Matrizenring* $\mathsf{M} \geqq \mathsf{P}$ *enthält nur Matrizen, deren Zeilen alle rechtsfinit, deren Spalten alle obenfinit sind.* Denn enthält eine Matrix $\mathfrak{B}$ aus $\mathsf{M}$ z. B. in der $q$-ten Zeile nach rechts zu unendlich viele Nichtnullen, dann kann eine Matrix vom Typus $\mathfrak{A}$ leicht so gewählt werden, daß $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ nicht existiert.

3. *Zeilenraum* $\zeta$ *und Spaltenraum* $\sigma$ *eines maximalen Matrizenringes* $\mathsf{M} \geqq \mathsf{P}$ *sind zueinander nie dual.* Denn jede Matrix von $\mathsf{M}$ führt den Spaltenraum $\sigma$ von $\mathsf{M}$ in sich über, aber $\mathfrak{C}$, das eine Matrix von $\mathsf{P}$ und somit von $\mathsf{M}$ ist, führt den Raum aller linksfiniten Stellen *nicht* in sich über, wie man leicht einsieht. Also kann $\sigma$, das nach 2. im Raum aller linksfiniten Stellen enthalten ist, nicht mit ihm identisch sein, sondern muß ein *echter* Teil von ihm sein. Ebenso muß $\zeta$ ein *echter* Teil des rechtsfiniten Raumes sein. Also sind sie nicht zueinander dual (§ 2, Satz 4).

4. *Es gibt ein* $\mathsf{M} \geqq \mathsf{P}$, *das maximal ist.* Zum Beweis denke man die Gesamtheit aller Matrizen, deren Zeilen rechtsfinit, deren Spalten obenfinit sind, wohlgeordnet und erweitere den Matrizenring P in der üblichen Weise durch transfinite Induktion aus dieser wohlgeordneten Folge von Matrizen, indem man jede Matrix, die einen Vorgänger hat, dem schon gebildeten Ring hinzufügt, falls dadurch der Ringcharakter nicht zerstört wird, sonst übergeht, und indem man bei Matrizen ohne Vorgänger erst den Vereinigungsring aller schon gebildeten Ringe konstruiert. Damit ist ein maximaler Ring nachgewiesen, dessen $\sigma$ und $\zeta$ zueinander nicht dual sind.

5. *In diesem Ring* M *sind* $\sigma$ *und* $\zeta$ *beide unvollkommen.* Denn wäre etwa $\sigma$ vollkommen, so wäre M nach Definition 2 vollkommen; dann müßten aber (nach Satz 4) $\sigma$ und $\zeta$ zueinander dual sein.

6. $\Sigma(\sigma)$ *ist kein Ring.* Denn sein Zeilenraum müßte $\sigma^*$ sein (nach § 6, Satz 2); $\Sigma(\sigma)$ umfaßt aber M. Wäre $\Sigma(\sigma)$ ein Ring, so müßte er, da M maximal ist, $=$ M sein. Der Zeilenraum von M ist aber $\neq \sigma^*$.

**Satz 5 (I. Umkehrtheorem).** *Ist der Matrizenring* M *maximal und ist* $\zeta^*$, *der duale Raum seines Zeilenraums, vollständig bezüglich* $\zeta$, *so ist* M *vollkommen.*

Wir führen den Beweis in 4 Schritten:

1. Aus Satz 3 folgt, daß $\sigma \geqq \varphi$ und $\zeta \geqq \varphi$.

2. Ist $\mathfrak{A}$ eine Matrix aus M, so führt sie jede bezüglich $\zeta$ konvergente Folge aus $\sigma$ wieder in eine solche über.

*Beweis.* Sei $\mathfrak{x}^{(n)}$ eine bezüglich $\zeta$ konvergente Folge aus $\sigma$, $\mathfrak{u}$ in $\zeta$, so ist $\mathfrak{u}(\mathfrak{A}(\mathfrak{x}^{(p)} - \mathfrak{x}^{(q)})) = (\mathfrak{u}\mathfrak{A})(\mathfrak{x}^{(p)} - \mathfrak{x}^{(q)})$. Nun ist $\mathfrak{u}\mathfrak{A} = \mathfrak{v}$ wieder eine Stelle aus $\zeta$; also geht $\mathfrak{v}(\mathfrak{x}^{(p)} - \mathfrak{x}^{(q)})$ gegen 0 mit wachsendem $p$, $q$; unsere Formel lehrt also, daß auch $\mathfrak{A}\mathfrak{x}^{(p)}$ eine bezüglich $\zeta$ konvergente Folge aus $\sigma$ ist.

3. Ist $\mathfrak{A}$ irgendeine Matrix aus M, so führt sie den Raum $\zeta^*$ in sich über.

*Beweis.* Sei $\mathfrak{x}$ eine Stelle aus $\zeta^*$, $\mathfrak{x}_n$ ihr $n$-ter Abschnitt, dann liegen die $\mathfrak{x}_n$ nach 1. in $\sigma$. Nach 2. bilden auch die Stellen $\mathfrak{A}\mathfrak{x}_n = \mathfrak{y}^{(n)}$ eine bezüglich $\zeta$ konvergente Folge in $\sigma \leqq \zeta^*$. Nun ist aber nach Voraussetzung $\zeta^*$ vollständig bezüglich $\zeta$; also haben die $\mathfrak{y}^{(n)}$ einen Limes $\mathfrak{y}$ in $\zeta^*$. Nun enthält $\zeta$ nach 1. alle $\mathfrak{e}_i$; es muß also speziell $\mathfrak{e}_i\mathfrak{y}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k$ einen Limes haben. Also konvergiert die unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}x_k = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{e}_i\mathfrak{y}^{(n)} = \mathfrak{e}_i\mathfrak{y}$, da $\lim \mathfrak{y}^{(n)} = \mathfrak{y}$; $\mathfrak{e}_i\mathfrak{y} = y_i$ ist aber die $i$-te Koordinate von $\mathfrak{y}$. Es ist also kurz $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$, zunächst im Sinne gewöhnlicher Konvergenz. Da aber $\zeta^*$ als vollkommener Raum normal ist, kann man über die Arcus der $y_i$ so verfügen, daß zugleich die absolute Konvergenz folgt. Also ist $\mathfrak{A}$ auf jede Stelle $\mathfrak{x}$ aus $\zeta^*$ anwendbar und liefert wieder eine Stelle aus $\zeta^*$.

4. Das bisherige ergibt $\mathsf{M} \leqq \Sigma(\zeta^*)$. Da $\zeta^*$ vollkommen ist, ist $\Sigma(\zeta^*)$ nach § 6, Satz 3 ein Matrizenring, und da M maximal ist, ist $\mathsf{M} = \Sigma(\zeta^*)$, also nach § 6, Satz 1 der Spaltenraum von M gleich $\zeta^*$, also vollkommen; daher ist M vollkommen.

**Satz 5 a.** *Ist der Matrizenring* M *maximal und sein Zeilenraum* $\zeta$ *normal, so ist* M *vollkommen.*

Denn da M maximal ist, ist, wie eben unter 1. erörtert, $\zeta \geqq \varphi$. Nach § 4, Satz 2 ist dann $\zeta^*$ vollständig bezüglich $\zeta$. Also ist nach Satz 5 der Ring M vollkommen.

**Satz 5 b.** *Ist* $\lambda \geqq \varphi$ *und normal, aber nicht vollkommen, so ist* $\Sigma(\lambda)$ *ein echter Teilring von* $\Sigma(\lambda^{**})$.

Nach § 7, Satz 2 ist $\Sigma(\lambda)$ ein Ring; nach § 7, Satz 3 ist dieser $\leqq \Sigma(\lambda^{**})$. Nach § 6, Satz 1 ist $\lambda$ der Spaltenraum von $\Sigma(\lambda)$, und wenn dieser normal ist, ergibt Satz 5a, daß er vollkommen ist, falls $\Sigma(\lambda)$ maximal ist. Also ist $\Sigma(\lambda)$ *nicht* maximal. Da $\Sigma(\lambda^{**})$ aber nach Satz 1 maximal ist, kann in $\Sigma(\lambda) \leqq \Sigma(\lambda^{**})$ das Gleichheitszeichen nicht gelten.

**Satz 6 (Eindeutigkeitssatz).** *Haben zwei maximale Matrizenringe* M *und* N *denselben Spaltenraum und denselben Zeilenraum, so sind sie identisch.*

Für zwei vollkommene Matrizenringe folgt die Identität nach Satz 4 bereits aus der Übereinstimmung entweder der Zeilenräume oder der Spaltenräume. Beides zusammen reicht aber auch bei nicht-vollkommenen Ringen aus.

Sei nämlich $\sigma$ der gemeinsame Spaltenraum, $\zeta$ der gemeinsame Zeilenraum von $\mathsf{M}$ und $\mathsf{N}$, so ist zunächst $\zeta \leqq \sigma^*$ (nach Satz 3, Folg.). Daher kann man § 6, Satz 5a auf $\lambda = \sigma$, $\mu = \zeta$ anwenden und erhält $\mathsf{M} \leqq \mathsf{T}$ und $\mathsf{N} \leqq \mathsf{T}$. Da nun $\mathsf{M}$ und $\mathsf{N}$ beide maximal sein sollen und $\mathsf{T}$ ein Ring ist, ist $\mathsf{M} = \mathsf{T}$, $\mathsf{N} = \mathsf{T}$, also $\mathsf{M} = \mathsf{N}$.

## § 10. Vollständige Matrizenringe.

**Definition 1.** *Die Folge* $\mathfrak{A}^{(1)}, \mathfrak{A}^{(2)}, \ldots$ *von Matrizen eines Matrizenringes* $\mathsf{M}$ *heiße konvergent, wenn für jede Stelle* $\mathfrak{u}$ *des Zeilenraumes* $\zeta$ *und für jede Stelle* $\mathfrak{x}$ *des Spaltenraumes* $\sigma$ *von* $\mathsf{M}$ *die Zahlenfolge* $\mathfrak{u}\mathfrak{A}^{(n)}\mathfrak{x}$ *konvergiert, oder anders ausgedrückt: wenn die Folge der Stellen* $\mathfrak{A}^{(n)}\mathfrak{x}$ *aus* $\sigma$ *bezüglich* $\zeta$ *konvergent ist.*

**Definition 2.** *Analog bedeute* $\lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{A}^{(n)} = \mathfrak{A}$, *daß* $\lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{u}\mathfrak{A}^{(n)}\mathfrak{x} = \mathfrak{u}\mathfrak{A}\mathfrak{x}$ *oder daß* $\lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{A}^{(n)}\mathfrak{x} = \mathfrak{A}\mathfrak{x}$ *bezüglich* $\zeta$.

**Definition 3.** $\mathsf{M}$ *heiße vollständig, wenn jede konvergente Folge von Matrizen aus* $\mathsf{M}$ *einen Limes besitzt.*

**Satz 1.** *Wenn* $\lambda \geqq \varphi$ *vollständig ist, so ist auch* $\Sigma(\lambda)$ *vollständig.*

Sei $\mathfrak{A}^{(n)}$ eine konvergente Folge von Matrizen aus $\Sigma(\lambda)$, so ist

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{e}_i \mathfrak{A}^{(n)} \mathfrak{e}_k = \lim_{n\to\infty} a_{ik}^{(n)} = a_{ik}$$

vorhanden. Sei $\mathfrak{A}$ die aus diesen $a_{ik}$ gebildete Matrix. Andererseits konvergiert nach Voraussetzung $\mathfrak{A}^{(n)}\mathfrak{x}$ für jedes $\mathfrak{x}$ aus $\sigma = \lambda$; wegen der Vollständigkeit von $\lambda$ hat diese Folge von Stellen in $\lambda$ einen Limes; sei $\mathfrak{y} = \lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{A}^{(n)}\mathfrak{x}$. Wir wollen zuerst zeigen, daß $\mathfrak{y} = \mathfrak{A}\mathfrak{x}$ ist.

Sei hierzu $\mathfrak{a}_i^{(n)}$ die $i$-te Zeile von $\mathfrak{A}^{(n)}$, $\mathfrak{a}_i$ die $i$-te Zeile von $\mathfrak{A}$, so besagt die Konvergenz von $\mathfrak{e}_i \mathfrak{A}^{(n)}\mathfrak{x} = \mathfrak{a}_i^{(n)}\mathfrak{x}$, daß die Folge $\mathfrak{a}_i^{(n)}$ in $\lambda^*$ konvergiert. Da $\lambda^*$ als vollkommener Raum nach § 3, Satz 5 vollständig ist, hat $\mathfrak{a}_i^{(n)}$ in $\lambda^*$ einen Limes, und wegen § 3, Satz 1 kann dieser kein anderer sein, als der koordinatenweise Limes $\mathfrak{a}_i$. Daher liegt $\mathfrak{a}_i$ in $\lambda^*$, $\mathfrak{a}_i\mathfrak{x}$ existiert, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{a}_i^{(n)}\mathfrak{x} = \mathfrak{a}_i\mathfrak{x}$. $\mathfrak{A}$ ist also auf $\mathfrak{x}$ anwendbar, und die $i$-te Koordinate von $\mathfrak{A}\mathfrak{x}$ ist $\mathfrak{a}_i\mathfrak{x}$. Andererseits ist $\mathfrak{a}_i^{(n)}\mathfrak{x}$ die $i$-te Koordinate von $\mathfrak{A}^{(n)}\mathfrak{x}$; ist also $y_i$ die $i$-te Koordinate von $\mathfrak{y}$, so ist $y_i = \lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{a}_i^{(n)}\mathfrak{x} = \mathfrak{a}_i\mathfrak{x}$, also $\mathfrak{y} = \mathfrak{A}\mathfrak{x}$. Da $\mathfrak{y}$ in $\lambda$ lag, liegt $\mathfrak{A}$ in $\Sigma(\lambda)$. $\mathfrak{y} = \lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{A}^{(n)}\mathfrak{x} = \mathfrak{A}\mathfrak{x}$ besagt aber jetzt, daß $\lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{A}^{(n)} = \mathfrak{A}$ ist. Damit ist alles bewiesen.

**Satz 2 (II. Umkehrtheorem).** *Jeder vollständige, maximale Matrizenring ist vollkommen.*

Ist $\mathfrak{a}$ irgendeine Stelle des Spaltenraumes $\sigma$ eines maximalen Matrizenringes $\mathsf{M}$, so gehört die Matrix, die $\mathfrak{a}$ als 1. Spalte und sonst nur Nullen enthält, $\mathsf{M}$ an. Denn ist $\mathfrak{A}$ eine Matrix aus $\mathsf{M}$, die $\mathfrak{a}$ als $k$-te Spalte enthält, so ist $\mathfrak{A}\mathfrak{C}_{k1}$ eine solche Matrix (vgl. § 9, Beweis von Satz 3), und nach § 9, Satz 3 gehört sie $\mathsf{M}$ an.

Die Voraussetzung der Vollständigkeit von $\mathsf{M}$ wenden wir jetzt lediglich auf diese Matrizen an, die außerhalb der 1. Spalte nur Nullen haben: $\lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{A}^{(n)}\mathfrak{x} = \mathfrak{A}\mathfrak{x}$ besagt in

diesem Falle, daß $\lim_{n\to\infty} x_1 \mathfrak{a}^{(n)} = x_1 \mathfrak{a}$ ist bezüglich $\zeta$, oder, wenn man gemäß § 9, Zusatz zu Satz 3 $\mathfrak{x} = \mathfrak{e}_1$ wählt, $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{a}^{(n)} = \mathfrak{a}$ bezüglich $\zeta$. Da nun $\mathfrak{a}^{(n)}$ nach der Vorbemerkung eine beliebige Folge von Stellen aus $\sigma$ ist, ist $\sigma$ vollständig bezüglich $\zeta \leqq \sigma^*$. Nach § 4, Satz 1 ist dann $\sigma$ vollkommen, also, da M maximal ist, M vollkommen.

**Satz 3.** *Enthält ein vollständiger Matrizenring alle endlichen Matrizen, so ist er maximal, also vollkommen.*

Der Beweis von Satz 2 hat erst ganz am Schluß vollen Gebrauch davon gemacht, daß M maximal ist; vorher hat er daraus nur soviel entnommen, daß M alle endlichen Matrizen enthält. Setzen wir also von M außer der Vollständigkeit nur dieses letztere voraus, so folgt genau wie vorhin, daß $\sigma$ vollkommen ist, also $\Sigma(\sigma)$ vollkommen. Nach § 9, Satz 3, Folg. ist $\mathsf{M} \leqq \Sigma(\sigma)$. Ist nun $\mathfrak{A}$ irgendeine Matrix aus $\Sigma(\sigma)$, und ist $\mathfrak{A}_{pq}$ die Matrix, die aus $\mathfrak{A}$ entsteht, indem man die Elemente aller Zeilen von der $(p+1)$-ten ab und aller Spalten von der $(q+1)$-ten ab durch Nullen ersetzt, so sind alle $\mathfrak{A}_{pq}$ als endliche Matrizen in M enthalten. Sei $\mathfrak{A}_q$ die Matrix, die aus $\mathfrak{A}$ entsteht, indem man die Elemente ihrer Spalten von der $(q+1)$-ten ab durch Nullen ersetzt, so ist $\lim_{p\to\infty} \mathfrak{A}_{pq} = \mathfrak{A}_q$ nach § 3, Satz 2. Wenn also M vollständig ist, enthält es auch alle $\mathfrak{A}_q$. Die Matrizen $\mathfrak{A}_q$ haben ihrerseits als Limes die Matrix $\mathfrak{A}$. Denn $\mathfrak{A}_q \mathfrak{x} = \mathfrak{A}\mathfrak{x}_q$ konvergiert gegen $\mathfrak{A}\mathfrak{x}$, da $\mathfrak{x}_q$ der $q$-te Abschnitt der Stelle $\mathfrak{x}$ aus $\sigma$ ist und $\mathfrak{A}$ nach § 6, Satz 6 stetig ist.

Da M vollständig ist, ist also $\mathfrak{A}$ in M gelegen. Also $\mathsf{M} = \Sigma(\sigma)$.

Der Beweis von Satz 3 beruhte darauf, daß $\mathfrak{A}$ aus seinen Abschnitten $\mathfrak{A}_{pq}$ durch einen zweifachen Grenzprozeß abgeleitet wurde. Daß man es auch als den unmittelbaren Limes seiner Abschnitte ansehen kann, besagt

**Satz 4.** *Ist $\mathfrak{A}$ Matrix eines vollkommenen Matrizenringes, so ist* $\lim_{p,q\to\infty} \mathfrak{A}_{pq} = \mathfrak{A}$.

Wir unterdrücken den nicht einfachen Beweis dieses Satzes, den wir nur der Vollständigkeit wegen aufgeführt haben. Der Beweis ist dem ursprünglichen des Satzes von der gleichmäßigen Endlichkeit der Bilinearformen in $\sigma_2$ nachgebildet, den Toeplitz dafür gegeben hatte, der aber in Math. Ann. 69 nicht abgedruckt worden ist.

## § 11. Starke Konvergenz von Matrizenfolgen.

Der oben (§ 10) eingeführte Begriff der Konvergenz von Matrizenfolgen ist nicht für alle Zwecke der geeignete. Der Satz

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{A}^{(n)} \lim_{n\to\infty} \mathfrak{B}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{A}^{(n)} \mathfrak{B}^{(n)} \tag{1}$$

braucht nicht zu gelten.

Das folgende Beispiel aus dem $\sigma_2$ zeigt es: Sei $\mathfrak{A}^{(n)} = \mathfrak{C}_{1n}$, $\mathfrak{B}^{(n)} = \mathfrak{C}_{n1}$ (in der Bezeichnungsweise von § 9, Satz 3), so ist

$$\mathfrak{u}\mathfrak{A}^{(n)}\mathfrak{x} = \mathfrak{u}\mathfrak{C}_{1n}\mathfrak{x} = u_1 x_n ,$$
$$\mathfrak{u}\mathfrak{B}^{(n)}\mathfrak{x} = \mathfrak{u}\mathfrak{C}_{n1}\mathfrak{x} = u_n x_1 .$$

Hat also $\lambda$ und $\lambda^*$ die Eigenschaft, daß für jede Stelle $\mathfrak{x}$ aus $\lambda$ und $\mathfrak{u}$ aus $\lambda^*$ $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ und $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ gilt — wie das z. B. bei $\lambda = \lambda^* = \sigma_2$ der Fall ist — so ist

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{A}^{(n)} = \mathfrak{O}, \quad \lim_{n\to\infty} \mathfrak{B}^{(n)} = \mathfrak{O}.$$

Dagegen ist $\mathfrak{A}^{(n)}\mathfrak{B}^{(n)} = \mathfrak{C}_{11}$ und daher auch $\mathfrak{u}(\mathfrak{A}^{(n)}\mathfrak{B}^{(n)})\mathfrak{x} = \mathfrak{u}\mathfrak{C}_{11}\mathfrak{x} = u_1 x_1$, also

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{A}^{(n)}\mathfrak{B}^{(n)} = \mathfrak{C}_{11} \neq \mathfrak{O}.$$

**Definition 1.** *Eine Folge $\mathfrak{A}^{(n)}$ von Matrizen eines vollkommenen Matrizenringes heiße stark-konvergent, wenn man für jede beschränkte Menge $X$ aus $\lambda$ und $U$ aus $\lambda^*$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $n$ finden kann, so daß*

$$|\mathfrak{u}(\mathfrak{A}^{(p)} - \mathfrak{A}^{(q)})\mathfrak{x}| \leqq \varepsilon \text{ für } p, q \geqq n(\varepsilon, X, U).$$

*Entsprechend wird die starke Konvergenz einer Folge gegen eine Matrix und die starke Vollständigkeit eines Matrizenringes definiert.*

**Definition 2.** *Die Folge $\mathfrak{A}^{(n)}$ heiße rechtsseitig-konvergent, wenn die Folge der Stellen $\mathfrak{A}^{(n)}\mathfrak{x}$ stark konvergiert.*

Das Beispiel $\mathfrak{A}^{(n)} = \mathfrak{C}_{1n}$ im $\sigma_2$ zeigt, daß eine Folge rechtsseitig-konvergent sein kann, ohne stark-konvergent zu sein. Zur Ausrechnung bedarf man des Satz 3 aus § 12. Die Folge $\mathfrak{A}^{(n)} = \mathfrak{C}_{n1}$ im $\sigma_2$ dagegen ist linksseitig-konvergent, ohne stark-konvergent oder rechtsseitig-konvergent zu sein. Also können alle drei Konvergenzbegriffe verschieden sein.

**Satz 1.** *Sowohl im Sinne starker als auch im Sinne rechtsseitiger Konvergenz gilt der Produktsatz: Ist* $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{A}^{(n)} = \mathfrak{A}$, $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{B}^{(n)} = \mathfrak{B}$, *so ist* $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{A}^{(n)}\mathfrak{B}^{(n)} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$.

Wir beweisen zuerst den Spezialfall: „Ist $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{A}^{(n)} = \mathfrak{O}$, $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{B}^{(n)} = \mathfrak{O}$, so ist $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{A}^{(n)}\mathfrak{B}^{(n)} = \mathfrak{O}$."

Für rechtsseitige Konvergenz zunächst ist nach Voraussetzung für jede beschränkte Menge $U$ aus $\lambda^*$, jedes $\mathfrak{x}$ aus $\lambda$ und jedes $\varepsilon > 0$

(1) $\quad |\mathfrak{u}(\mathfrak{A}^{(p)}\mathfrak{x})| \leqq \varepsilon$ für $p \geqq m(\varepsilon, \mathfrak{x}, U)$ und alle $\mathfrak{u}$ aus $U$,

(2) $\quad |\mathfrak{u}(\mathfrak{B}^{(p)}\mathfrak{x})| \leqq \varepsilon$ für $p \geqq n(\varepsilon, \mathfrak{x}, U)$ und alle $\mathfrak{u}$ aus $U$.

Die Aussage (1) ergibt, daß alle $\mathfrak{u}\mathfrak{A}^{(p)}$ für alle $\mathfrak{u}$ aus $U$ eine beschränkte Menge $V$ bilden. (2) ergibt dann, auf $V$ statt auf $U$ angewendet, daß

$$|\mathfrak{u}(\mathfrak{A}^{(p)}\mathfrak{B}^{(p)})\mathfrak{x}| = |(\mathfrak{u}\mathfrak{A}^{(p)})\mathfrak{B}^{(p)}\mathfrak{x}| \leqq \varepsilon \text{ für } p \geqq n(\varepsilon, \mathfrak{x}, V);$$

das ist die Behauptung. Für starke Konvergenz ersetze man das einzelne $\mathfrak{x}$ durch die Gesamtheit aller $\mathfrak{x}$ aus einer beschränkten Menge $X$ aus $\lambda$.

Satz 1 ergibt sich nun aus dem behandelten Spezialfall vermöge der formalen Tatsache

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{A}^{(n)}\mathfrak{B}^{(n)} = {} & (\mathfrak{A} - \mathfrak{A}^{(n)})\mathfrak{B} + \mathfrak{A}(\mathfrak{B} - \mathfrak{B}^{(n)}) \\ & + (\mathfrak{A}^{(n)} - \mathfrak{A})(\mathfrak{B} - \mathfrak{B}^{(n)}),\end{aligned}$$

wobei der dritte Summand durch den Spezialfall erledigt ist und die beiden anderen durch § 7, Satz 5, der beim ersten auf $\lambda$, beim zweiten auf $\lambda^*$ anzuwenden ist.

**Satz 2.** *Jeder vollkommene Matrizenring ist stark-vollständig und rechtsseitig-vollständig.*

Dies folgt in derselben Weise aus der Vollständigkeit des Matrizenringes (vgl. § 10, Satz 1), wie sich in § 5, Satz 3 die starke Vollständigkeit des Raumes aus seiner Vollständigkeit ergeben hat.

## Kapitel III. Spezielle Räume. Erweiterungen.

### § 12. Der Hilbertsche Raum $\sigma_2$.

$\sigma_2$ ist die Menge aller Stellen $\mathfrak{x}$, bei denen $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ konvergiert. Ist $\mathfrak{u}$ eine Stelle eben dieses Raumes, so ist $|u_n x_n| \leqq |u_n|^2 + |x_n|^2$, also $\Sigma|u_n x_n|$ konvergent, d. h. $\sigma_2^* \geqq \sigma_2$. Wäre $\sigma_2^* > \sigma_2$, so gäbe es eine Stelle $\mathfrak{u}$ aus $\sigma_2^*$, bei der $\Sigma|u_n|^2$ divergiert. Sei dann $n_1$ so gewählt, daß $|u_1|^2 + \cdots + |u_{n_1}|^2 = M_1 \geqq 1$ ausfällt, $n_2$ so, daß $|u_{n_1+1}|^2 + \cdots + |u_{n_2}|^2 = M_2 \geqq 1$ wird u. s. f., und wählt man

$$x_1 = r_1\bar{u}_1, \ldots, x_{n_1} = r_1\bar{u}_{n_1}, \quad x_{n_1+1} = r_2\bar{u}_{n_1+1}, \ldots, x_{n_2} = r_2\bar{u}_{n_2}, \ldots,$$

wobei die $r_i$ positiv und im übrigen noch unbestimmt sind, so ist

$$\Sigma|x_i|^2 = r_1^2(u_1\bar{u}_1 + \cdots + u_{n_1}\bar{u}_{n_1}) + r_2^2(u_{n_1+1}\bar{u}_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}\bar{u}_{n_2}) + \cdots,$$
$$\Sigma u_i x_i = r_1(u_1\bar{u}_1 + \cdots + u_{n_1}\bar{u}_{n_1}) + r_2(u_{n_1+1}\bar{u}_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}\bar{u}_{n_2}) + \cdots.$$

Wählt man $r_n = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{M_n}$, so wird $\sum_i u_i x_i = \sum_n \frac{1}{n}$ divergent, aber

$\sum_i |x_i|^2 = \sum_n \frac{1}{n^2}\frac{1}{M_n^2}M_n = \sum_n \frac{1}{n^2 M_n} \leqq \sum_n \frac{1}{n^2}$ wegen $M_n \geqq 1$, also konvergent. Daher

**Satz 1.** $\sigma_2^* = \sigma_2$.

**Satz 2.** *$\sigma_2$ ist der einzige zu sich selbst duale Raum.*

Ist nämlich $\lambda^* = \lambda$ und ist $\mathfrak{x}$ irgendeine Stelle von $\lambda$, so gehört $\bar{\mathfrak{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots)$, die Stelle mit den konjugiert-imaginären Koordinaten, $\lambda^*$ an, da $\lambda^*$ und somit auch $\lambda$ vollkommen, also normal ist; daher ist $\Sigma x_i\bar{x}_i$ konvergent, $\mathfrak{x}$ in $\sigma_2$, also $\lambda \leqq \sigma_2$. Nach § 2, Satz 4 ist also $\lambda^* \geqq \sigma_2^*$, was nach Voraussetzung dasselbe ist wie $\lambda \geqq \sigma_2$. Mithin $\lambda = \sigma_2$.

**Satz 3.** *Eine Menge von Stellen des $\sigma_2$ ist dann und nur dann beschränkt, wenn sie es im Sinne der Hilbertschen Metrik ist.*

Daß jede im Hilbertschen Sinne beschränkte Menge $X$, $|\mathfrak{x}| = \sqrt{\Sigma x_i\bar{x}_i} \leqq M$, auch in unserem Sinne (§ 5, Def. 1) beschränkt ist, ergibt die Schwarzsche Ungleichung $|\mathfrak{u}\mathfrak{x}| \leqq |\mathfrak{u}|\,|\mathfrak{x}|$; denn aus ihr folgt $|\mathfrak{u}\mathfrak{x}| \leqq M|\mathfrak{u}|$ für alle $\mathfrak{x}$ der Menge.

Ist umgekehrt eine Menge $X$ in unserem Sinne beschränkt, so ist sie nach § 5, Satz 1 voll-beschränkt, d. h. $|\mathfrak{u}\mathfrak{x}| \leqq r(U)$ für alle $\mathfrak{x}$ aus $X$, $\mathfrak{u}$ aus $U$, wo $U$ irgendeine beschränkte Menge aus $\lambda^*$ ist. Wegen $\sigma_2^* = \sigma_2$ und wegen § 5, Satz 2 können wir speziell $U = \bar{X}$ wählen und $\mathfrak{u} = \bar{\mathfrak{x}}$; dann folgt $|\mathfrak{x}\bar{\mathfrak{x}}| \leqq r(\bar{X})$, d. h. die Menge $X$ ist im Hilbertschen Sinne beschränkt.

**Satz 4.** *Eine Folge von Stellen ist dann und nur dann stark-konvergent, wenn sie im Hilbertschen Sinne stark konvergiert, d.h. wenn $|\mathfrak{x}^{(p)} - \mathfrak{x}^{(q)}|$ gegen 0 geht.*

Das folgt gemäß der Definition unmittelbar aus Satz 3.

**Satz 5.** *Eine Folge von Stellen ist dann und nur dann konvergent, wenn sie im Hilbertschen Sinne schwach konvergent ist, d. h. beschränkt ist und koordinatenweise konvergiert.*

Dies folgt aus § 5, Satz 6; denn daß die Abschnitte $\mathfrak{u}_n$ jeder Stelle $\mathfrak{u}$ von $\lambda^* = \sigma_2$ stark gegen $\mathfrak{u}$ konvergieren, folgt sofort aus Satz 4.

**Satz 6.** *Eine Matrix $\mathfrak{A}$ gehört dann und nur dann zu $\Sigma(\sigma_2)$, wenn sie im Hilbertschen Sinne beschränkt ist, d. h. wenn $|\mathfrak{u}\mathfrak{A}\mathfrak{x}| \leqq M|\mathfrak{u}|\,|\mathfrak{x}|$, wo $M$ nur von $\mathfrak{A}$ abhängt.*

Vermöge Satz 3 folgt dies unmittelbar aus § 7, Satz 7.

Satz 6 ist der „Satz von der gleichmäßigen Endlichkeit der bilinearen Formen" von Hellinger-Toeplitz, Math. Ann. **69**, 1910, pag. 321 ff., der durch unsere Theorie neu bewiesen wird. Als Kern dieses neuen Beweises stellen sich die Schlußweisen in § 3, Satz 5 und § 5, Satz 1 dar. Die wesentliche Vereinfachung gegenüber Ann. 69 liegt darin, daß der schwierige Teil des Schlusses nicht mehr an Doppelfolgen, sondern an einfachen Folgen — oder anders ausgedrückt: nicht an den Matrizen, sondern im linearen Raum ausgeführt ist; das ist der eigentliche Sinn des Transformationstheorems (§ 6, Satz 3), daß es durch eine kurze formale Betrachtung diese Zurückführung auf den linearen Raum vollzieht.

Die *Hilbertschen „Faltungssätze"*, die besagen, daß die beschränkten Matrizen einen Ring bilden, folgen jetzt mittelst Satz 6 daraus, daß $\Sigma(\sigma_2)$ ein Ring ist.

**Satz 7.** *Sei $p_1, p_2, \ldots$ eine beliebige Folge positiver Zahlen, so bilden die Stellen $\mathfrak{y}$ mit den Koordinaten $y_i = p_i x_i$, wo $\mathfrak{x}$ den $\sigma_2$ durchläuft, einen vollkommenen Raum $\lambda$, der zu $\sigma_2$ homöomorph ist* [19]).

[19]) E. Hellinger und O. Toeplitz, Gött. Nachr. 1906, p. 351—355, Math. Ann. **69**, § 12.

Man überlegt nämlich leicht, daß die Stellen $\mathfrak{v}$ mit den Koordinaten $v_i = \frac{1}{p_i} u_i$ den dualen Raum $\lambda^*$ durchlaufen, wenn $\mathfrak{u}$ den $\sigma_2^* = \sigma_2$ durchläuft. Daraus folgt $\lambda^{**} = \lambda$ und alles weitere. Es gilt nun aber:

**Satz 8.** *Mit den in Satz 7 angegebenen Räumen sind alle zu $\sigma_2$ homöomorphen Räume $\lambda \geqq \varphi$ erschöpft.*

Der Beweis wird in zwei Schritten vollzogen.

I. Nach § 8, Satz 7 ist $\lambda$ vollkommen. Mit der Homöomorphie zwischen $\sigma_2$ und $\lambda$ ist eine zwischen $\sigma_2^* = \sigma_2$ und $\lambda^*$ verbunden: $\sigma_2 = \mathfrak{A}(\lambda^*)$. Seien $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots$ diejenigen Stellen, die den Stellen $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots$ des $\lambda^*$ in $\sigma_2$ homöomorph zugeordnet sind; die $\mathfrak{a}_i$ seien also die Spalten von $\mathfrak{A}$. Eine lineare Abhängigkeit $c_1\mathfrak{a}_1 + \cdots + c_n\mathfrak{a}_n = \mathfrak{o}$ zwischen endlichvielen $\mathfrak{a}_i$ ist unmöglich, da sie sich homöomorph in die Abhängigkeit $c_1\mathfrak{e}_1 + \cdots c_n\mathfrak{e}_n = \mathfrak{o}$ übertragen würde. Auf die Vektoren $\mathfrak{a}_i$ des $\sigma_2$ wenden wir das Orthogonalisierungsverfahren an; es liefert

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}_1 &= p_{11}\mathfrak{a}_1 \\ \mathfrak{b}_2 &= p_{21}\mathfrak{a}_1 + p_{22}\mathfrak{a}_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned} \tag{1}$$

wo die $\mathfrak{b}_i$ zueinander unitär-orthogonal sind, d. h. $\mathfrak{b}_i\bar{\mathfrak{b}}_k = e_{ik}$. Die $p_{ii}$ sind alle $\neq 0$, da das Verschwinden eines der $p_{ii}$ eine lineare Abhängigkeit endlich vieler $\mathfrak{a}_i$ bedeuten würde. Daher drücken sich auch umgekehrt die $\mathfrak{a}_i$ rekursiv durch die $\mathfrak{b}_i$ aus:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_1 &= q_{11}\mathfrak{b}_1 \\ \mathfrak{a}_2 &= q_{21}\mathfrak{b}_1 + q_{22}\mathfrak{b}_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots. \end{aligned} \tag{2}$$

Die Matrix der Transformation (1) heiße $\mathfrak{P}$, die von (2) heiße $\mathfrak{Q}$.

*Die $\mathfrak{b}_i$ bilden ein vollständiges Orthogonalsystem des $\sigma_2$.* Jede Stelle aus $\lambda^*$ ist nämlich nach § 3, Satz 2 der Limes ihrer Abschnitte, d. h. der Limes linearer Verbindungen von je endlich vielen $\mathfrak{e}_i$. Homöomorph überträgt sich das dahin, daß jede Stelle des $\sigma_2$ der Limes von linearen Verbindungen je endlichvieler $\mathfrak{a}_i$ ist. Da aber jedes $\mathfrak{a}_i$ sich seinerseits aus endlichvielen $\mathfrak{b}_i$ zusammensetzt, erscheint jede Stelle des $\sigma_2$ auch als Limes linearer Verbindungen von je endlichvielen $\mathfrak{b}_i$. Wäre nun das Orthogonalsystem $\mathfrak{b}_i$ *nicht* vollständig, so gäbe es eine Stelle $\mathfrak{b}$, die zu allen $\mathfrak{b}_i$ orthogonal ist, $\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{b}}_i = 0$. Auch diese wäre dann der Limes von linearen Verbindungen von endlichvielen $\mathfrak{b}_i$. Da $\sigma_2^* = \sigma_2$, ist $\mathfrak{b}$ auch eine Stelle von $\sigma_2^*$, und § 3, Def. 2 ergibt, daß $\mathfrak{b}\bar{\mathfrak{b}} = 0$ sein müßte, also $\mathfrak{b} = \mathfrak{o}$.

Sei $\mathfrak{B}$ die orthogonale Transformation des $\sigma_2$ auf sich, die die $\mathfrak{b}_i$ in die $\mathfrak{e}_i$ überführt (die Zeilen der zugehörigen Matrix sind die $\mathfrak{b}_i$), so führt $\mathfrak{B}$ die $\mathfrak{a}_i = q_{i1}\mathfrak{b}_1 + \cdots + q_{ii}\mathfrak{b}_i$ in $q_{i1}\mathfrak{e}_1 + \cdots + q_{ii}\mathfrak{e}_i$ über. Die Homöomorphie $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ führt also die Stellen $\mathfrak{e}_i$ des $\lambda^*$ in $q_{i1}\mathfrak{e}_1 + \cdots + q_{ii}\mathfrak{e}_i$ über. Die Matrix dieser Homöomorphie lautet also

$$\mathfrak{Q}' = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} & \cdot \\ 0 & q_{22} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Aus $\sigma_2 = \mathfrak{Q}'(\lambda^*)$ folgt aber nach § 8, Satz 5: $\sigma_2 = \mathfrak{P}(\lambda)$, $\lambda = \mathfrak{Q}(\sigma_2)$.

II. Bisher ist gezeigt worden, daß, wenn $\sigma_2$ und $\lambda$ überhaupt homöomorph sind, sich auch eine solche Homöomorphie zwischen ihnen finden läßt, deren Matrix „regulär" ist, d. h. oberhalb der Diagonale nur Nullen, in der Diagonale nur Nichtnullen aufweist. Unter Benutzung der Diagonalelemente $q_{ii}$ von $\mathfrak{Q}$ leiten wir jetzt aus den Stellen $\mathfrak{x}$ des $\sigma_2$ in der Art von Satz 7 den Raum der Stellen $(q_{11}x_1, q_{22}x_2, \ldots)$ ab und zeigen, daß dieser mit $\lambda$ identisch ist. Oder vielmehr: wir zeigen, daß, wenn $\mathfrak{y}$ eine Stelle aus $\lambda$ ist, $\left(\frac{y_1}{q_{11}}, \frac{y_2}{q_{22}}, \ldots\right) = \tilde{\mathfrak{y}}$ stets eine Stelle von $\sigma_2$ ist, was auf dasselbe hinausläuft.

Sei $\tilde{\lambda}$ der Raum aller dieser Stellen $\tilde{\mathfrak{y}}$. Mit $\lambda$ ist auch $\tilde{\lambda}$ vollkommen und zu $\sigma_2$ homöomorph; wir können ferner als bewiesen annehmen, daß zwischen $\sigma_2$ und $\tilde{\lambda}$ eine Homöomorphie besteht:

$$\sigma_2 = \tilde{\mathfrak{P}}(\tilde{\lambda}), \qquad \tilde{\lambda} = \tilde{\mathfrak{Q}}(\sigma_2),$$

wobei

$$\tilde{\mathfrak{P}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot \\ \tilde{p}_{21} & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathfrak{Q}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot \\ \tilde{q}_{21} & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

1. $\tilde{\lambda} \leqq \sigma_2$. Gäbe es nämlich eine Stelle $\tilde{\mathfrak{y}}$ in $\tilde{\lambda}$, die nicht zu $\sigma_2$ gehört, so wäre

$$\tilde{\mathfrak{P}}(\tilde{\mathfrak{y}}) = (\tilde{y}_1, \tilde{p}_{21}\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{p}_{n1}\tilde{y}_1 + \cdots + \tilde{p}_{n,n-1}\tilde{y}_{n-1} + \tilde{y}_n, \ldots).$$

Mit $\tilde{\mathfrak{y}}$ liegt aber auch jede Stelle $(\varepsilon_1\tilde{y}_1, \varepsilon_2\tilde{y}_2, \ldots)$ in $\tilde{\lambda}$, wo $|\varepsilon_i| = 1$. Seien die $\varepsilon_i$ rekursiv so gewählt, daß $\varepsilon_n\tilde{y}_n$ denselben Arcus hat wie $\tilde{p}_{n1}\tilde{y}_1\varepsilon_1 + \cdots + \tilde{p}_{n,n-1}\tilde{y}_{n-1}\varepsilon_{n-1}$, dann ist

$$|\tilde{p}_{n1}\tilde{y}_1\varepsilon_1 + \cdots + \tilde{p}_{n,n-1}\tilde{y}_{n-1}\varepsilon_{n-1} + \tilde{y}_n\varepsilon_n| \geqq |\tilde{y}_n|.$$

Wäre also $\Sigma|\tilde{y}_n|^2$ divergent, d. h. $\tilde{\mathfrak{y}}$ nicht in $\sigma_2$, so wäre auch $\tilde{\mathfrak{P}}(\tilde{\mathfrak{y}})$ nicht in $\sigma_2$, entgegen der Voraussetzung.

2. $\tilde{\lambda} \geqq \sigma_2$. Ist nämlich $\mathfrak{x}$ irgendeine Stelle aus $\sigma_2$, $\tilde{\mathfrak{y}} = \tilde{\mathfrak{Q}}(\mathfrak{x})$ die entsprechende aus $\tilde{\lambda}$, so ist

$$\tilde{\mathfrak{y}} = \tilde{\mathfrak{Q}}(\mathfrak{x}) = (x_1, \tilde{q}_{21}x_1 + x_2, \ldots),$$

und es kann wieder durch Beifügung von unimodularen Faktoren $\varepsilon_i$ an die $x_i$ erreicht werden, daß

$$|\tilde{q}_{n1}x_1\varepsilon_1 + \cdots + \tilde{q}_{n,n-1}x_{n-1}\varepsilon_{n-1} + x_n\varepsilon_n| \geqq |x_n|$$

ist. Es ist also eine Stelle $\tilde{\mathfrak{Q}}(\mathfrak{x})$ in $\tilde{\lambda}$ gefunden, deren Koordinaten die Beträge der $x_n$ übertreffen. Nach § 3, Satz 4 ist also auch $\mathfrak{x}$ in $\tilde{\lambda}$ gelegen, $\sigma_2 \leqq \tilde{\lambda}$ [20]).

## § 13. Der Raum $\sigma_\infty$ der Stellen mit beschränkten Koordinaten.

$\sigma_\infty$ sei der Raum aller Stellen $\mathfrak{x}$ mit $|x_n| \leqq m(\mathfrak{x})$, $\sigma_1$ der Raum aller Stellen, deren Koordinatenbetragsumme konvergiert.

**Satz 1.** *$\sigma_\infty$ und $\sigma_1$ sind zueinander dual.*

Da $\sigma_\infty$ die Stelle $\mathfrak{d} = (1, 1, \ldots)$ enthält, ist für jede Stelle aus $\sigma_\infty^*$ die $\Sigma|u_i|$ konvergent, also $\sigma_\infty^* \leqq \sigma_1$. Ist umgekehrt $\Sigma|u_i|$ konvergent, so auch $\Sigma|u_i x_i|$ für jedes $\mathfrak{x}$ aus $\sigma_\infty$, $\sigma_\infty \geqq \sigma_1$, also $\sigma_\infty^* = \sigma_1$.

$\sigma_1^* \geqq \sigma_\infty$ ergibt sich daraus unmittelbar. Wäre nun $\mathfrak{x}$ eine unbeschränkte Stelle aus $\sigma_1^*$, so wähle man unter ihren Koordinaten eine Teilfolge $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots$ aus, für die $|x_{\alpha_n}| \geqq n^2$ gilt; sei dann $\mathfrak{u}$ eine Stelle, für die $u_{\alpha_n} = \dfrac{1}{n^2}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, alle anderen $u_i = 0$, so wäre $\Sigma|u_i x_i|$ divergent, obgleich $\mathfrak{u}$ in $\sigma_1$ liegt. Also $\sigma_1^* \leqq \sigma_\infty$.

In $\sigma_\infty$ bietet sich mit $|\mathfrak{x}| = \sup|x_i|$ unmittelbar eine *Metrik* dar, ebenso in $\sigma_1$ mit $|\mathfrak{u}| = \Sigma|u_i|$.

**Satz 2.** *Eine Menge von Stellen des $\sigma_\infty$ ist dann und nur dann beschränkt, wenn sie es im Sinn dieser Metrik ist. Analoges gilt für $\sigma_1$.*

Ist nämlich $\mathfrak{x}$ in $\sigma_\infty$ und $|\mathfrak{x}| \leqq M$, so ist $|\Sigma u_i x_i| \leqq M\Sigma|u_i| = M|\mathfrak{u}|$, d. h. jede im Sinne der Metrik beschränkte Menge ist beschränkt. Ist umgekehrt $X$ eine in

[20]) Im Gegensatz zu Teil I des Beweises, der ganz und gar auf $\sigma_2$ zugeschnitten ist, gilt Teil II auch für andere Räume als $\sigma_2$, z. B. für $\sigma_\infty$. Für den $\sigma_\infty$ hatte sich dies E. Hagemann unabhängig von uns überlegt.

unserem Sinne beschränkte Menge, so ist sie nach § 5, Satz 1 voll-beschränkt, d. h. $|\mathfrak{u}\mathfrak{x}| \leqq r(U)$ für alle $\mathfrak{x}$ aus $X$ und alle $\mathfrak{u}$ aus $U$, wo $U$ eine beschränkte Menge aus $\sigma_1$ ist. Sei $U$ die Menge der Stellen $\mathfrak{e}_i$, so folgt $|x_i| \leqq r(U)$, d. h. $|\mathfrak{x}| \leqq r(U)$, also im Sinn der Metrik beschränkt.

Für $\sigma_1$ schließt man ebenso, nur daß man $U$ als die Menge der Stellen wählt, deren sämtliche Koordinaten den Betrag 1 haben.

**Folgerung.** *Die Konvergenz im Sinne der Metrik ist identisch mit starker Konvergenz.*

**Satz 3.** *Für $\sigma_1$ sind starke Konvergenz und Konvergenz identisch.*

Daß eine stark-konvergente Folge konvergent ist, gilt allgemein. Daß aber in $\sigma_1$ jede konvergente Folge auch im Sinn der Metrik konvergiert und daher, wie eben gezeigt, stark konvergiert, folgt aus dem Hilfssatz zu § 3, Satz 5, wenn man darin $\mathfrak{u}$ durch $\mathfrak{d}$ ersetzt.

Für $\sigma_\infty$ gilt der Satz nicht; die Folge $\mathfrak{e}_n$ bildet ein Gegenbeispiel.

**Satz 4.** *Eine Transformation $\mathfrak{A}$ führt dann und nur dann $\sigma_\infty$ in sich über, wenn sie „zeilenabsolut" ist, d. h. wenn alle ihre Zeilenbetragsummen konvergieren und unter einer gemeinsamen Schranke bleiben. Bei $\sigma_1$ muß die Transformation spaltenabsolut sein* [21]).

Für $\sigma_\infty$ folgt es aus dem Bilinearformensatz (§ 7, Satz 7), wenn man darin $X$ als Menge der Stellen, deren Koordinaten alle vom Betrage 1 sind, und $U$ als Menge der $\mathfrak{e}_n$ wählt. Für $\sigma_1$ folgt es dann aus § 6, Satz 4.

## § 14. Symmetrische Räume.

$\sigma_r$ bedeute den Raum aller Stellen $\mathfrak{x}$, für die $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^r$ konvergiert, $r \geqq 1$.

**Satz 1.** $\sigma_r^* = \sigma_s$, *wo* $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{s} = 1$.

Denn aus $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{s} = 1$ folgt $r + s = rs$, also $s(r-1) = r$, $\dfrac{r}{s} = r - 1$, und daher

$$|u_n x_n| = |u_n|^r \frac{|x_n|}{|u_n|^{r-1}} = |u_n|^r \frac{|x_n|}{|u_n|^{\frac{r}{s}}} = |u_n|^r \left(\frac{|x_n|^s}{|u_n|^r}\right)^{\frac{1}{s}},$$

ebenso

$$|u_n x_n| = |x_n|^s \left(\frac{|u_n|^r}{|x_n|^s}\right)^{\frac{1}{r}},$$

d. h. $|u_n x_n|$ liegt zwischen $|u_n|^r$ und $|x_n|^s$. Ist nun $\mathfrak{x}$ eine Stelle aus $\sigma_r$, $\mathfrak{u}$ eine aus $\sigma_s$, so ist $\Sigma |x_n|^r$ und $\Sigma |u_n|^s$ konvergent, und damit auch $\Sigma |u_n x_n|$ konvergent, d. h. $\sigma_s \leqq \sigma_r^*$. Daß $\sigma_s \geqq \sigma_r^*$ ist, folgt in ähnlicher Weise wie § 12, Satz 1 [22]).

Eine Metrik ist durch $|\mathfrak{x}| = \sqrt[r]{\Sigma |x_n|^r}$ gegeben, und die bekannte Höldersche Ungleichung gestattet, den Sätzen 2 und 4 aus § 13 entsprechende Sätze für alle $\sigma_r$ abzuleiten.

**Definition.** *Ein linearer Raum heiße symmetrisch, wenn ihm mit einer Stelle $\mathfrak{x}$ zugleich auch alle diejenigen Stellen angehören, deren Koordinaten gegenüber denen von $\mathfrak{x}$ irgendwie umgeordnet sind.*

Die Hölder-Rieszschen Räume $\sigma_r$ einschl. $\sigma_\infty$ sind symmetrische Räume, ebenso $\omega$ und $\varphi$.

---

[21]) Das ist im wesentlichen das Theorem von [3]) (vgl. die Einleitung).

[22]) Vgl. E. Landau, Gött. Nachr. 1907, p. 25—27.

**Satz 2.** *Jeder von $\omega$ und $\varphi$ verschiedene vollkommene, symmetrische Raum $\lambda$ ist Teil von $\sigma_\infty$ und enthält $\sigma_1$:* $\sigma_1 \leqq \lambda \leqq \sigma_\infty$.

Enthält nämlich $\lambda$ irgendeine unbeschränkte Stelle $\mathfrak{x}$, so enthält er, wenn er vollkommen, also normal ist, alle $\mathfrak{y}$ mit $|y_p| \leqq |x_p|$. Ist $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots$ eine Teilfolge der Koordinaten von $\mathfrak{x}$ mit $|x_{\alpha_i}| \to \infty$, so enthält $\lambda$ auch diejenige Stelle, die aus $\mathfrak{x}$ hervorgeht, wenn man unter ihren Koordinaten die $x_{\alpha_i}$ durch ihre Beträge, alle anderen durch Nullen ersetzt. Sei nun $\mathfrak{u}$ irgendeine Stelle aus $\lambda^*$, die nicht finit ist, und seien $u_{\beta_1}, u_{\beta_2}, \ldots$ die nichtverschwindenden unter ihren Koordinaten, so gibt es unter den Koordinaten von $\mathfrak{x}$ sicher eine $x_{\gamma_1}$, für die $|x_{\gamma_1}| \geqq \frac{1}{|u_{\beta_1}|}$ ist, sodann unter den übrigen Koordinaten von $\mathfrak{x}$ eine $x_{\gamma_2}$, für die $|x_{\gamma_2}| \geqq \frac{1}{|u_{\beta_2}|}$ ist usw.; wegen der Symmetrie enthält $\lambda$ mit $\mathfrak{x}$ auch diejenige Stelle $\mathfrak{y}$, bei der die Koordinaten $x_{\gamma_1}, x_{\gamma_2}, \ldots$ an die Stellen mit den Indizes $\beta_1, \beta_2, \ldots$ transportiert sind. Alsdann ist aber $\mathfrak{u}\mathfrak{y} = \Sigma u_{\beta_i} x_{\gamma_i}$ divergent. Ist also $\lambda^* \neq \varphi$, so muß $\lambda \leqq \sigma_\infty$ sein. Aber aus $\lambda^* = \varphi$ würde $\lambda^{**} = \omega$ folgen, und, wenn $\lambda$ vollkommen ist, also auch $\lambda = \omega$, entgegen der Voraussetzung. Also muß $\lambda \leqq \sigma_\infty$ sein.

Nun ist mit $\lambda$ auch $\lambda^*$ symmetrisch. Wendet man das bisher erlangte Resultat auf $\lambda^*$ an, so folgt $\lambda^* \leqq \sigma_\infty$, also $\lambda^{**} \geqq \sigma_\infty^* = \sigma_1$ und daher auch $\lambda \geqq \sigma_1$.

Eine ähnliche Schlußweise ergibt: *Für jeden von $\omega$ und $\varphi$ verschiedenen vollkommenen symmetrischen Raum $\lambda$ gibt es eine positive Zahl $s$ ($1 \leqq s \leqq \infty$) derart, daß alle $\sigma_r$ mit $r < s$ in $\lambda$ enthalten sind und daß alle $\sigma_r$ mit $r > s$ den Raum $\lambda$ enthalten; $\sigma_s$ selbst ist dann entweder $\leqq \lambda$ oder $\geqq \lambda$.*

Nach den bisherigen Ergebnissen wäre es noch denkbar, daß $\omega$, $\varphi$ und die $\sigma_r (1 \leqq r \leqq \infty)$ bereits alle vollkommenen, symmetrischen Räume erschöpfen. Ohne Beweis sei hinzugefügt, daß dies *nicht* der Fall ist; vielmehr gibt es zu jedem $s$ unendlichviele vollkommene symmetrische Räume, die untereinander nicht vergleichbar sind.

**Folgerung.** *$\omega$ und $\varphi$ sind die einzigen vollkommenen Räume, die nur mit sich selbst homöomorph sind.*

Denn ein vollkommener Raum $\lambda$ ist mit allen denjenigen homöomorph, die aus ihm durch Umordnung der Koordinaten hervorgehen, und andererseits auch mit jedem, der aus ihm im Sinne von § 12, Satz 7 abgeleitet ist. Soll also $\lambda$ nur sich selbst homöomorph sein, so muß es einerseits symmetrisch sein, also, wenn es nicht $\omega$ ist, nach Satz 2 $\leqq \sigma_\infty$. Andererseits muß es, wenn es nicht $\varphi$ ist, auch unbeschränkte Stellen enthalten. Man erhält also einen Widerspruch, wenn $\lambda$ nicht $\omega$ oder $\varphi$ ist.

## § 15. Konvergenzfreie Räume.

**Definition 1.** *Ein Raum $\lambda$ heiße konvergenzfrei, wenn er mit $\mathfrak{x}$ jede Stelle $\mathfrak{y}$ enthält, bei der alle diejenigen Koordinaten 0 sind, deren gleichindizierte in $\mathfrak{x}$ gleich 0 sind.*

$\varphi$ und $\omega$ sind konvergenzfreie Räume. Jeder konvergenzfreie Raum ist normal. Das zweite Beispiel zu § 3, Satz 4 zeigt, daß auch ein konvergenzfreier Raum den Raum $\varphi$ enthalten und normal sein kann, ohne vollkommen zu sein.

Ein weiteres Beispiel eines konvergenzfreien Raumes ist der *halbfinite Raum* $\psi$, dessen Stellen $\mathfrak{x}$ unter ihren Koordinaten mit geradem Index nur endlichviele Nichtnullen haben; $\psi^*$ ist der Raum der Stellen, die unter ihren ungeraden Koordinaten nur endlichviele Nichtnullen haben, $\psi^{**} = \psi$[23]).

**Definition 2.** *Eine Menge $M$ von Indizes heiße eine F-Menge für den konvergenzfreien Raum $\lambda$, wenn jede Stelle von $\lambda$ „auf ihr finit ist", d. h. nur endlich viele von 0 verschiedene Koordinaten mit Indizes aus $M$ hat. $M$ heiße W-Menge für $\lambda$, wenn es eine unendliche Menge ist und wenn es eine Stelle in $\lambda$ gibt, deren Koordinaten in $M$ sämtlich von 0 verschieden sind.*

[23]) Vgl. G. Köthe und O. Toeplitz, J. f. Math. **165**, 1931, p. 116—127.

Bei $\psi$ z. B. ist die Menge der geraden Indizes eine $F$-Menge, die der ungeraden eine $W$-Menge, bei $\varphi$ ist jede Menge eine $F$-Menge, bei $\omega$ jede unendliche Indizesmenge eine $W$-Menge.

**Satz 1.** *Der duale Raum $\lambda^*$ eines konvergenzfreien Raumes $\lambda$ besteht aus denjenigen Stellen, die auf allen $W$-Mengen von $\lambda$ finit sind.*

Daß alle diese Stellen in $\lambda^*$ liegen, ist klar; denn sei $\mathfrak{u}$ eine solche und $\mathfrak{x}$ irgendeine Stelle aus $\lambda$, die nicht finit ist, so bilden die Indizes der Nichtnullen dieser Stelle $\mathfrak{x}$ eine $W$-Menge für $\lambda$; $\mathfrak{u}$ ist also auf ihr finit, $\mathfrak{ux}$ hat nur endlichviele Summanden.

Wäre umgekehrt $\mathfrak{v}$ eine Stelle aus $\lambda^*$, die auf einer $W$-Menge nicht finit ist, so bilde man ein $\mathfrak{x}$, das auf dieser $W$-Menge die reziproken Koordinaten von $\mathfrak{v}$ hat, sonst Nullen, so daß $\mathfrak{vx}$ divergiert; diese Stelle $\mathfrak{x}$ läge aber nach der Definition des konvergenzfreien Raumes in $\lambda$. Mithin kann $\mathfrak{v}$ nicht in $\lambda^*$ liegen.

**Satz 2.** *Ein konvergenzfreier Raum $\lambda$ ist dann und nur dann vollkommen, wenn er aus allen auf seinen $F$-Mengen finiten Stellen aus $\omega$ besteht.*

Wendet man nämlich Satz 1 auf $\lambda^*$ an, so erweist sich $\lambda^{**}$ als die Gesamtheit derjenigen Stellen, die auf allen $W$-Mengen von $\lambda^*$, d. h. auf allen $F$-Mengen von $\lambda$ finit sind.

**Zusatz.** *Ist $\lambda$ vollkommen, so sind die $W$-Mengen von $\lambda$ die $F$-Mengen von $\lambda^*$, die $F$-Mengen von $\lambda$ die $W$-Mengen von $\lambda^*$.*

**Satz 3.** *Eine Menge $X$ eines konvergenzfreien Raumes $\lambda$ ist dann und nur dann beschränkt, wenn 1. die Menge $M$ aller Indizes, für die mindestens eine Stelle eine von Null verschiedene Koordinate hat, eine $W$-Menge für $\lambda^{**}$, also eine $F$-Menge für $\lambda^*$ ist, und wenn 2. für jeden festen Index $i$ aus $M$ die $i$-ten Koordinaten aller Stellen $\mathfrak{x}$ aus $X$ dem Betrage nach beschränkt sind.*

a) *Eine solche Menge ist beschränkt.* Denn ist $\mathfrak{u}$ irgendeine Stelle aus $\lambda^*$, $\mathfrak{x}$ eine Stelle aus $X$, so ist $\mathfrak{u}$ finit auf $M$, also $\mathfrak{ux}$ eine endliche Summe,

$$\mathfrak{ux} = u_{\alpha_1} x_{\alpha_1} + \cdots + u_{\alpha_n} x_{\alpha_n},$$

daher

$$|\mathfrak{ux}| \leqq |u_{\alpha_1}|\, M_{\alpha_1} + \cdots + |u_{\alpha_n}|\, M_{\alpha_n} = r(\mathfrak{u}, X),$$

wo $M_i$ die Schranke für die $i$-te Koordinate aller $\mathfrak{x}$ aus $X$ bedeutet.

b) *Umkehrung.* Eine beschränkte Menge $X$ muß zunächst die Forderung erfüllen, daß die Beträge der $i$-ten Koordinaten beschränkt sind, da sonst schon die Bildung des Produkts $\mathfrak{e}_i\mathfrak{x}$ aller $\mathfrak{x}$ aus $X$ und $\mathfrak{e}_i$ zum Widerspruch führen würde.

Wir haben also nur noch zu zeigen, daß die zu $X$ gehörige Menge $M$ eine $W$-Menge für $\lambda^{**}$ ist, oder m. a. W. eine $F$-Menge für $\lambda^*$. Wäre sie es nicht, so gäbe es eine Stelle $\mathfrak{u}$ in $\lambda^*$ mit unendlichvielen Nichtnullen auf $M$. Zu jeder dieser Nichtnullen $u_{\alpha_1}, u_{\alpha_2}, \ldots$ kann man gemäß der Definition von $M$ je eine Stelle $\mathfrak{x}^{(1)}, \mathfrak{x}^{(2)}, \ldots$ aus $X$ finden, die auf dem betreffenden Index eine Nichtnull hat, und da $\lambda^*$konvergenzfrei ist, kann man, ohne $\lambda^*$ zu verlassen, diese Koordinaten von $\mathfrak{u}$ beliebig abändern, zuerst die endlichvielen, die in $\mathfrak{ux}^{(1)}$ vorkommen, $u_{\alpha_1}, \ldots, u_{\alpha_\nu}$, dann $u_{\alpha_{\nu+1}}$ und alle die endlichvielen, die in $\mathfrak{ux}^{(\nu+1)}$ vorkommen und nicht schon verbraucht sind, usf., und zwar kann man die Abänderung so vornehmen, daß $\mathfrak{ux}^{(1)}, \mathfrak{ux}^{(\nu+1)}, \ldots \to \infty$.

**Satz 4.** *In konvergenzfreien Räumen fällt die starke Konvergenz mit der Konvergenz zusammen.*

Es ist nur zu zeigen, daß jede konvergente Folge stark konvergiert. Zuerst bildet nach § 5, Satz 5 jede konvergente Folge $\mathfrak{x}^{(n)}$ eine beschränkte Menge in $\lambda$. Also bilden nach Satz 3 die Indizes aller Nichtnullen aller $\mathfrak{x}^{(n)}$ eine $F$-Menge von $\lambda^*$. Sei ferner $U$ eine beschränkte Menge in $\lambda^*$, so bilden nach Satz 3 die Indizes aller Nichtnullen aller $\mathfrak{u}$ aus $U$ eine $W$-Menge von $\lambda^*$. Beide Indizesmengen haben also nur endlichviele Indizes

gemein, und $u\mathfrak{x}^{(n)}$ hat nur endlichviele Summanden. Ferner folgt aus Satz 3, daß die $i$-ten Koordinaten der $u$ aus $U$ unter einer Schranke $m_i(U)$ liegen. Also ist $|u(\mathfrak{x}^{(p)} - \mathfrak{x}^{(q)})| \leqq \varepsilon$ für $p, q \geqq n(\varepsilon, U)$, da die hier eingehenden endlichvielen $u$-Koordinaten unter dem größten $m_i(U)$ liegen und da jede einzelne Koordinate von $\mathfrak{x}^{(p)} - \mathfrak{x}^{(q)}$ bei hinreichend großem $p$, $q$ wegen der Konvergenz der Folge beliebig klein wird. —

Unter einem Ausschnitt einer unendlichen Matrix $\mathfrak{A}$ soll jede Matrix verstanden werden, die aus $\mathfrak{A}$ durch Streichung von Zeilen und Spalten hervorgeht; und zwar soll mit $\mathfrak{A}_{MN}$ derjenige Ausschnitt bezeichnet werden, bei dem die Indizes der beibehaltenen Zeilen eine Menge $M$, die Indizes der beibehaltenen Spalten eine Menge $N$ bilden. Die Menge *aller* Indizes 1, 2, . . heiße $Z$.

**Satz 5a.** *Eine Transformation mit der Matrix $\mathfrak{A}$ führt den konvergenzfreien vollkommenen Raum $\lambda$ dann und nur dann in sich über, wenn man zu jeder W-Menge $N$ von $\lambda$ eine andere W-Menge $M$ von $\lambda$ so hinzubestimmen kann, daß alle Nichtnullen des Ausschnitts $\mathfrak{A}_{ZN}$ bereits in $\mathfrak{A}_{MN}$ gelegen sind, und zu jeder F-Menge $P$ von $\lambda$ eine F-Menge $Q$ von $\lambda$, so daß alle Nichtnullen des Ausschnitts $\mathfrak{A}_{PZ}$ bereits in $\mathfrak{A}_{PQ}$ liegen.*

**Satz 5b.** *Eine Transformation mit der Matrix $\mathfrak{A}$ führt den konvergenzfreien vollkommenen Raum $\lambda$ dann und nur dann in sich über, wenn in jedem Ausschnitt $\mathfrak{A}_{UV}$, wo $U$ eine F-Menge, $V$ eine W-Menge für $\lambda$ ist, nur endlichviele Nichtnullen stehen.*

1. Wir beginnen mit dem Nachweis, daß das Kriterium von Satz 5a dasjenige von Satz 5b zur Folge hat. $\mathfrak{A}_{UV}$ ist nämlich ein Ausschnitt von $\mathfrak{A}_{ZV}$; nach dem Kriterium von Satz 5a gibt es eine $W$-Menge $M$, so daß alle Nichtnullen von $\mathfrak{A}_{ZV}$ und somit auch alle Nichtnullen von $\mathfrak{A}_{UV}$ in $\mathfrak{A}_{MV}$ enthalten sind; aber die $W$-Menge $M$ hat mit der $F$-Menge $U$ nur endlichviele Indizes gemeinsam. Also liegen alle Nichtnullen von $\mathfrak{A}_{UV}$ in endlichvielen Zeilen. Ebenso zeigt man, daß sie nur in endlichvielen Spalten liegen. Also enthält $\mathfrak{A}_{UV}$ nur endlichviele Nichtnullen.

2. Wir zeigen sodann, daß das Kriterium von Satz 5a notwendig ist. Die Spalten, aus denen der Ausschnitt $\mathfrak{A}_{ZN}$ besteht, sind die Transformierten der Einheitsstellen des Raumes $\lambda$, deren Indizes $N$ angehören. Die Menge *dieser* Einheitsstellen ist beschränkt, da $N$ eine $W$-Menge für $\lambda$ ist. Nach § 7, Satz 5 bilden auch die Transformierten davon, also die Spalten von $\mathfrak{A}_{ZN}$, eine beschränkte Menge. Nach Satz 3 liegen alle Nichtnullen dieser Spalten bereits auf einer $W$-Menge $M$ von $\lambda$, d. h. alle Nichtnullen von $\mathfrak{A}_{ZN}$ liegen schon in $\mathfrak{A}_{MN}$.

3. Endlich zeigen wir, daß das Kriterium von Satz 5b hinreichend ist. Ist $\mathfrak{x}$ irgendeine Stelle aus $\lambda$, so bilden die Indizes der Nichtnullen unter ihren Koordinaten eine $W$-Menge $N$ für $\lambda$. Besteht $U$ nur aus einem Index $p$, und ist $V = N$, so ergibt das Kriterium von Satz 5b, daß die $p$-te Zeile von $\mathfrak{A}$ nur endlichviele Nichtnullen enthält, deren Indizes $N$ angehören. Also kann $\sum_q a_{pq} x_q = y_p$ für jedes $p$ gebildet werden. Es ist nun noch zu zeigen, daß $\mathfrak{y}$ wiederum $\lambda$ angehört. Nach Satz 2 genügt es dazu, zu zeigen, daß $\mathfrak{y}$ auf allen $F$-Mengen für $\lambda$ finit ist. Sei $U$ eine beliebige $F$-Menge für $\lambda$, $V = N$, so enthält nach Voraussetzung $\mathfrak{A}_{UN}$ nur endlichviele Nichtnullen; also ergibt $\mathfrak{A}_{UZ}\mathfrak{x} = \mathfrak{A}_{UN}\mathfrak{x}$ nur endlichviele Nichtnullen, d. h. $\mathfrak{y}$ enthält auf $U$ nur endlichviele Nichtnullen.

Damit ist alles nötige gezeigt. [24])

## § 16. Andere Konvergenzbegriffe an Stelle der absoluten Konvergenz.

Der denkbar engste Konvergenzbegriff, den man für die Summen $u\mathfrak{x} = \Sigma u_i x_i$ an Stelle der absoluten Konvergenz in der ganzen Theorie zugrunde legen kann, ist der,

[24]) Daß es unendlich viele nicht-homöomorphe vollkommene konvergenzfreie Räume gibt und welches nächst $\varphi$ und $\psi$ die einfachsten unter ihnen sind, behandelt Herr F. Menn in seiner Dissertation.

der nur abbrechende Reihen als konvergent ansieht. *Für ihn wird jeder vollkommene Raum $\lambda$ konvergenzfrei.* Denn ist $\lambda > \varphi$ — der Raum $\lambda = \varphi$ ist gewiß konvergenzfrei — so gibt es in $\lambda$ eine Stelle $\mathfrak{x}$ mit unendlichvielen Nichtnullen; jedes $\mathfrak{u}$ aus $\lambda^*$ muß auf der Indexmenge dieser Stellen finit sein; daher wird auch jedes $\mathfrak{y}$, das dort irgendwelche anderen Werte hat als $\mathfrak{x}$, zu $\lambda^{**}$ gehören, d. h. $\lambda^{**}$ ist konvergenzfrei. Ist also $\lambda$ vollkommen, so ist es selbst konvergenzfrei.

Die Beschränkung auf diesen engsten Konvergenzbegriff würde also der Beschränkung auf die konvergenzfreien Räume gleichkommen und würde dieser Theorie, wenn man sie für sich darstellen wollte, am angemessensten sein.

Daneben wollen wir uns hier ganz auf den Fall beschränken, daß *gewöhnliche Konvergenz* statt absoluter genommen wird.[25]) Von der Theorie bleibt dann vieles gültig:

§ 2 (ganz); § 3, Satz 1, 2, 3, 6 (unter Weglassung des Wortes „normal"); § 4, Satz 1; § 5, Satz 1 und Hilfssatz (wofern man noch „$\lambda^*$ vollständig bezüglich $\lambda$" voraussetzt), Satz 3—6; § 6, Satz 1, 2, 5, 5a und 6 (wofern man „$\lambda$ vollkommen" ersetzt durch „$\lambda^*$ vollständig bezüglich $\lambda$"), 7 (unter Weglassung des Wortes „normal"); § 7, Satz 1, ferner die Sätze 3—7 (wofern man „$\lambda$ normal" ersetzt durch „$\lambda^*$ vollständig bezüglich $\lambda$"); § 8, Satz 1—6, 8, 9 (wofern man überall „$\lambda$ normal" ersetzt durch „$\lambda^*$ vollständig bezüglich $\lambda$"), § 9, Satz 2, 3, 6.

*Für solche Räume $\lambda$, bei denen $\lambda^*$ vollständig ist bezüglich $\lambda$, gilt also ein großer Teil der Theorie.* Aber bei gewöhnlicher Konvergenz hat nicht jeder vollkommene Raum diese Eigenschaft. Die folgenden Sätze zeigen dies und somit, daß nicht jeder vollkommene Raum vollständig ist. Damit fallen immerhin wesentliche Teile der Theorie.

**Satz 1.** *$\vartheta$ sei der Raum der fastkonstanten Folgen, d. h. der Stellen $(c_1, \ldots, c_n, c, c, \ldots) = c\mathfrak{d} + \mathfrak{f}$, wo $\mathfrak{f}$ finit ist, $\mathfrak{d} = (1, 1, \ldots)$. Der im Sinne gewöhnlicher Konvergenz duale Raum $\vartheta^*$ ist dann der Raum aller Stellen $\mathfrak{u}$ mit konvergentem $\Sigma u_n$, $\vartheta^{**}$ der Raum aller Stellen $\mathfrak{y}$ mit konvergentem $\sum_{n=2}^{\infty} |y_n - y_{n-1}|$.*

Die Behauptung über $\vartheta^*$ ist unmittelbar ersichtlich. Was $\vartheta^{**}$ betrifft, so handelt es sich um solche $\mathfrak{y}$, für die $\Sigma y_n u_n$ stets konvergiert, wenn $\Sigma u_n$ konvergiert. Sei $s_0 = 0$, $s_n = u_1 + \cdots + u_n$ $(n > 0)$, also $s_n - s_{n-1} = u_n$, so ist

$$t_n = \sum_{i=1}^{n} y_i u_i = \sum_{i=1}^{n} y_i (s_i - s_{i-1}) = (y_1 - y_2)s_1 + \cdots + (y_{n-1} - y_n)s_{n-1} + y_n s_n,$$

und zwar soll $t_n$ stets dann einen Limes haben, wenn $s_n$ einen hat. Das ist nach dem Satz von Toeplitz [3]) (vgl. auch § 13 dieser Arbeit, Satz 4) dann und nur dann der Fall, wenn

$$(1) \qquad |y_1 - y_2| + \cdots + |y_{n-1} - y_n| + |y_n| \leqq M.$$

(Die beiden anderen Bedingungen des Toeplitzschen Satzes sind hier von selbst erfüllt.) Aus (1) folgt die Konvergenz von

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} |y_i - y_{i+1}|.$$

---

[25]) Allgemeiner kann man anstatt absoluter Konvergenz der *Summe* $\mathfrak{u}\mathfrak{x}$ irgendeinen Summabilitätsbegriff voraussetzen, der linear ist und jede abbrechende Reihe summiert. Man kann ferner auch an denjenigen Stellen unserer Theorie, wo konvergente *Folgen* von Zahlen auftreten (nämlich $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{u}\mathfrak{x}^{(n)}$ bei der Grenzstelle einer konvergenten Folge von Stellen), diese Konvergenz, die in der Arbeit als gewöhnliche Konvergenz vorausgesetzt ist, in einem allgemeineren Sinne verstehen. Und zwar ist der Sinn, den wir der „summablen Reihe" $\mathfrak{u}\mathfrak{x}$ beilegen, zunächst völlig unabhängig von dem Sinn, in dem wir die Folge $\mathfrak{u}\mathfrak{x}^{(n)}$ als „konvergente Folge" bezeichnen. Der ganze § 2 und § 3, Satz 1 gelten dann unverändert; § 3, Satz 2 gilt dann und nur dann, wenn die Partialsummen jeder „summablen Reihe" eine „konvergente Folge" bilden. Wenn auch umgekehrt jede „konvergente Folge" Folge der Partialsummen einer „summablen Reihe" ist, gilt § 3, Satz 6, und zwar ohne die Voraussetzung, daß $\lambda$ normal sei. Von den übrigen Sätzen werden die meisten ungültig; es sei indessen hervorgehoben, daß das Transformationstheorem in der Gestalt von § 7, Satz 1 unter der gleichen Voraussetzung gültig bleibt, wie Satz 2 von § 3.

Umgekehrt folgt aus der Konvergenz von (2) leicht (1).

**Satz 2.** *Der Raum $\vartheta^*$, der im Sinne gewöhnlicher Konvergenz vollkommen ist, ist nicht vollständig.*

Sei $\mathfrak{w} = (-1, 1, -1, 1, \ldots)$, so werde die Folge der geraden Abschnitte $\mathfrak{w}_{2n}$ von $\mathfrak{w}$ betrachtet. Sie liegen alle in $\varphi$, also auch in $\vartheta^*$. Die Folge ist konvergent; denn ist $\mathfrak{y}$ irgendeine Stelle aus $\vartheta^{**}$, so ist, wenn $p > q$,

$$\mathfrak{y}(\mathfrak{w}_{2p} - \mathfrak{w}_{2q}) = -y_{2q+1} + y_{2q+2} \mp \cdots - y_{2p-1} + y_{2p},$$

also nach Satz 1

$$|\mathfrak{y}(\mathfrak{w}_{2p} - \mathfrak{w}_{2q})| \leqq |y_{2q+2} - y_{2q+1}| + \cdots + |y_{2p} - y_{2p-1}| \leqq \varepsilon$$

für hinreichend großes $p$, $q$. Würde $\lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{w}_{2n}$ existieren, dann müßte er gleich $\mathfrak{w}$ sein, da die einzelnen Koordinaten gegen die von $\mathfrak{w}$ konvergieren. Aber $\mathfrak{w}$ liegt nicht in $\vartheta^*$, da die Summe seiner Koordinaten divergiert.

Im Falle absoluter Konvergenz galt für jeden normalen Raum $\lambda \geqq \varphi$, daß $\lambda^*$ bezüglich $\lambda$ vollständig ist, und damit ein erheblicher Teil der ganzen Theorie. In der Auffassung der gewöhnlichen Konvergenz ist für alle normalen $\lambda$ der duale Raum der nämliche, wie im Sinne absoluter Konvergenz; damit bleibt auch die Vollständigkeit von $\lambda^*$ bezüglich $\lambda$ und alle ihre Folgen erhalten. Der folgende Satz gibt eine umfassendere Bedingung, unter der $\lambda^*$ bezüglich $\lambda$ vollständig bleibt, wofern alles im Sinne gewöhnlicher Konvergenz verstanden wird, und erlaubt überhaupt erst, Räume zu konstruieren, die diese Eigenschaft haben, ohne normal zu sein.

**Satz 3.** *„Teilstück" der Stelle $\mathfrak{x}$ heiße jede Stelle vom Typus* $(0, .. 0, x_i, .., x_k, 0, ..)$; *„sich nicht überdeckende Teilstücke" von $\mathfrak{x}$ mögen solche sein, deren Nichtnullen nie den gleichen Index haben. Der Raum $\lambda \geqq \varphi$ möge nun folgende Eigenschaft haben: für jede Stelle $\mathfrak{x}$ und jede aus ihr herausgegriffene Folge von sich paarweise nicht überdeckenden Teilstücken sei man imstande, aus der Folge eine solche Teilfolge $\mathfrak{x}^{(1)}, \mathfrak{x}^{(2)}, \ldots$ herauszugreifen, daß $\mathfrak{x}^{(1)} + \mathfrak{x}^{(2)} + \cdots$ eine Stelle aus $\lambda$ ist. Dann ist $\lambda^*$ vollständig bezüglich $\lambda$.*

Sei $\mathfrak{u}^{(1)}, \mathfrak{u}^{(2)}, \ldots$ eine bezüglich $\lambda$ konvergente Folge von Stellen aus $\lambda^*$. Da $\lambda \geqq \varphi$, existiert $\lim\limits_{n\to\infty} u_i^{(n)} = u_i$; sei $\mathfrak{u} = (u_1, u_2, \ldots)$. Die Behauptung läuft dann, wie man leicht überlegt, darauf hinaus, daß es zu jedem $\mathfrak{x}$ aus $\lambda$ und $\varepsilon > 0$ ein $N$ gibt, so daß für $n \geqq N$ gilt: $|\sum\limits_{i=1}^{\infty}(u_i^{(n)} - u_i)\, x_i| \leqq \varepsilon$.

Gesetzt, dies wäre falsch, so gäbe es ein $\varepsilon > 0$, ein $\mathfrak{x}$ aus $\lambda$ und eine wachsende Folge natürlicher Zahlen $n_1, n_2, ..,$ für die gilt:

$$(0) \qquad |\sum_{i=1}^{\infty}(u_i^{(n_\alpha)} - u_i)\, x_i| > \varepsilon \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots);$$

es soll rekursiv eine Stelle $\mathfrak{y}$ aus $\lambda$ konstruiert werden, für die $|(\mathfrak{u}^{(p)} - \mathfrak{u}^{(q)})\mathfrak{y}| \leqq \frac{\varepsilon}{4}$ nicht für alle $p, q \geqq n_0(\varepsilon)$ gelten wird. Und zwar soll die Rekursion nicht, wie beim Beweise von § 3, Satz 5 vom ersten Schritt an induktiv geschildert werden, sondern es soll unmittelbar angegeben werden, wie die Rekursion vom $j$-ten zum $(j+1)$-ten Schritt zu vollziehen ist. Wir denken bereits bestimmt: eine Folge wachsender natürlicher Zahlen $N_1 < \cdots < N_j$, eine andere Folge $M_1 < \cdots < M_j$ so, daß durchweg $N_i < M_i < N_{i+1}$; seien ferner $m_1 < \cdots < m_j$ aus den $n_i$ herausgegriffen und ebenso $k_1 < \cdots < k_j$ mit $k_i > m_i$ derart, daß

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{M_{j-1}} |(u_i^{(m_j)} - u_i^{(m_j+l)})\, x_i| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad \text{für alle } l > 0,$$

$$(2)\qquad \left|\sum_{i=1}^{N_j}(u_i^{(m_j)}-u_i)\,x_i\right| > \varepsilon\,,$$

$$(3)\qquad \left|\sum_{i=1}^{N_j}(u_i^{(m_j)}-u_i^{(k_j)})\,x_i\right| > \varepsilon\,,$$

$$(4)\qquad \left|\sum_{i=M_j}^{M_j+t}(u_i^{(m_l)}-u_i^{(k_l)})\,x_i\right| < \frac{\varepsilon}{4\cdot 2^j} \qquad \text{für alle } t \text{ und alle } l \leqq j$$

gilt. Wir bestimmen dann $m_{j+1} > m_j$ so, daß (1) für $j+1$ statt $j$ gilt (das geht wegen der koordinatenweisen Konvergenz der $\mathfrak{u}^{(n)}$ gegen $\mathfrak{u}$), ferner $N_{j+1} > M_j\ (> N_j)$ so, daß (2) für $j+1$ gilt (das geht wegen (0)), ferner $k_{j+1} > k_j$ und $> m_{j+1}$ so, daß (3) für $j+1$ gilt (wegen (0) und der koordinatenweisen Konvergenz) und schließlich $M_{j+1} > N_{j+1}$ so, daß (4) für $j+1$ gilt (das geht, weil $\mathfrak{u}^{(m_i)} - \mathfrak{u}^{(k_i)}$ eine Stelle aus $\lambda^*$, $\mathfrak{x}$ eine Stelle aus $\lambda$ ist). Am Anfang sei $M_0$ willkürlich gewählt.

Alsdann wird das Teilstück

$$\mathfrak{x}^{(j)} = (0, \ldots, 0,\ x_{M_{j-1}}, \ldots, x_{N_j}, 0, \ldots)$$

von $\mathfrak{x}$ betrachtet — $M_{j-1} < N_j$ ist gewährleistet und $N_j < M_j$ bewirkt, daß die Teilstücke sich nicht überdecken —, und aus der Folge $\mathfrak{x}^{(j)}$ wird gemäß der Voraussetzung eine Teilfolge $\mathfrak{x}^{(\alpha_1)}, \mathfrak{x}^{(\alpha_2)}, \ldots$ herausgegriffen ($\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots$), deren Summe

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{x}^{(\alpha_1)} + \mathfrak{x}^{(\alpha_2)} + \cdots$$

in $\lambda$ liegt. Dann ist dies die gewünschte Stelle $\mathfrak{y}$, d. h. es ist, wie wir zeigen werden,

$$(5)\qquad |(\mathfrak{u}^{(m_j)} - \mathfrak{u}^{(k_j)})\,\mathfrak{y}| \geqq \frac{\varepsilon}{4}$$

für $j = \alpha_1, \alpha_2, \ldots$. Die Summe linkerhand, die konvergiert, zerlegt sich gemäß der Natur von $\mathfrak{y}$ in eine Kette von unendlichvielen Stücken, zwischen denen Nullenserien stehen. Von diesen Stücken heben wir eines, nämlich für $j = \alpha_r$ das $r$-te, hervor und zerlegen die unendliche Summe in $A + B + C$, wo $B$ dieses $r$-te Stück bedeutet, $A$ alle vorangehenden Glieder der Reihe, $C$ den Rest.

Dann ist nach (1) wegen $N_{\alpha_r-1} < M_{\alpha_r-1} \leqq M_{\alpha_r-1}$ und $m_{\alpha_r} < k_{\alpha_r}$

$$|A| = \left|\sum_{i=1}^{N_{\alpha_r-1}}(u_i^{(m_{\alpha_r})} - u_i^{(k_{\alpha_r})})\,y_i\right| < \frac{\varepsilon}{4}\,,$$

ferner wegen (4) und $\alpha_r \leqq \alpha_{r+1} - 1$

$$|C| = \left|\sum_{i=M_{\alpha_{r+1}-1}}^{\infty}(u_i^{(m_{\alpha_r})} - u_i^{(k_{\alpha_r})})\,y_i\right| \leqq \frac{\varepsilon}{4\cdot 2^{\alpha_{r+1}-1}} + \frac{\varepsilon}{4\cdot 2^{\alpha_{r+2}-1}} + \cdots \leqq \frac{\varepsilon}{4}\,,$$

endlich wegen (3), (1) und $k_{\alpha_r} > m_{\alpha_r}$

$$|B| = \left|\sum_{i=M_{\alpha_r-1}}^{N_{\alpha_r}}(u_i^{(m_{\alpha_r})} - u_i^{(k_{\alpha_r})})\,x_i\right| \geqq \left|\sum_{i=1}^{N_{\alpha_r}}\right| - \left|\sum_{i=1}^{M_{\alpha_r-1}}\right| \geqq \left|\varepsilon - \frac{\varepsilon}{4}\right| = \frac{3}{4}\,\varepsilon\,.$$

Daraus folgt für die linke Seite von (5)

$$|A + B + C| \geqq \frac{\varepsilon}{4}\,,$$

wie behauptet.

**Satz 4.** *$\Sigma(\vartheta^*)$ ist ein Ring.*

Nach § 7 Satz 1, übertragen auf gewöhnliche Konvergenz, genügt es dazu zu zeigen, daß $\vartheta^{**}$ vollständig ist bezüglich $\vartheta^*$. Hierzu genügt es nach Satz 3, zu zeigen, daß $\vartheta^*$ die

Voraussetzungen dieses Satzes erfüllt. $\vartheta^*$ besteht aus den Stellen $\mathfrak{u}$, bei denen $\Sigma u_i$ konvergiert. Es ist leicht, aus jeder Folge von Ausschnitten einer konvergenten Summe eine Teilfolge herauszugreifen, deren Summe konvergiert.

Ohne Beweis erwähnen wir noch folgende Tatsachen über $\vartheta^*$ und $\vartheta^{**}$:

**Satz 4a.** *Die Transformation $\mathfrak{A}$ führt dann und nur dann jede Stelle $\mathfrak{u}$ mit konvergenter Summe $\Sigma u_i$ in eine Stelle $\mathfrak{v}$ mit konvergenter Summe $\Sigma v_i = \sum_i (\sum_k a_{ik} u_k)$ über, wenn*

1) *die Matrix $b_{pq} = \sum_{i=1}^{p} (a_{iq} - a_{i,q+1})$ zeilenabsolut ist,*

2) *$b_q = \lim_{p \to \infty} b_{pq}$ existiert für alle $q$,*

3) *$\sum_{i=1}^{\infty} a_{i1}$ existiert.*

Dieses Kriterium für Mittelbildungen konvergenter Reihen, das sich nicht rein formal aus dem für konvergente Folgen [3]) ergibt, ist eine Anwendung unseres Bilinearformensatzes (§ 7, Satz 7).

Aus Satz 4a kann man folgern

**Satz 4b.** *$\Sigma(\vartheta^{**})$ ist ein maximaler Ring, $= \Sigma'(\vartheta^*)$.*

Es ist dies deshalb nicht selbstverständlich, weil die Voraussetzung hier fehlt, daß $\vartheta^{***}$ vollständig ist bezüglich $\vartheta^{**}$. Denn $\vartheta^{***} = \vartheta^*$ ist nach Satz 2 nicht vollständig, d. h. nicht vollständig bezüglich $\vartheta^{**}$. Es gibt hiernach vollkommene Räume $\lambda$, nämlich $\lambda = \vartheta^{**}$, bei denen $\lambda^*$ bezüglich $\lambda$ nicht vollständig ist und bei denen trotzdem $\Sigma(\lambda)$ ein Ring ist. Es erhebt sich hier das *noch offene Problem, ob für jeden im Sinne gewöhnlicher Konvergenz vollkommenen Raum $\lambda$ stets $\Sigma(\lambda)$ ein Ring ist.*

Der Raum $\vartheta^*$ kann angesehen werden als die Gesamtheit der Stellen $\mathfrak{u}$, für die $\mathfrak{u}\mathfrak{d}$ konvergiert.

**Satz 5.** *Legt man anstatt der einen Stelle $\mathfrak{d}$ eine abzählbare Menge von beliebigen Stellen $\mathfrak{d}^{(1)}, \mathfrak{d}^{(2)}, \ldots$ zugrunde, und betrachtet man den Raum $\lambda$ aller Stellen $\mathfrak{u}$, für die alle $\mathfrak{u}\mathfrak{d}^{(i)}$ konvergieren, so ist $\Sigma(\lambda)$ stets ein Ring.*

Der Beweis ergibt sich aus dem von Satz 4 durch Einschaltung eines Diagonalverfahrens bei der Auswahl der Teilfolge.

---

Eingegangen 5. September 1933.

# Isomorphismus maximaler Matrizenringe.

Von *Anton Weber* in Köln. [1])

Unter einem Matrizenring sei eine Menge M von abzählbar-unendlichen Matrizen verstanden, deren Koeffizienten komplexe Zahlen sind, mit folgenden Eigenschaften:

1. Mit $\mathfrak{A} = (a_{pq})$ und $\mathfrak{B} = (b_{pq})$ gehört auch $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = (a_{pq} + b_{pq})$ zur Menge,
2. für je zwei Matrizen der Menge konvergieren die sämtlichen unendlichen Reihen $\sum_{\alpha=1}^{\infty} a_{p\alpha} b_{\alpha q}$ absolut; die von ihnen gebildete Matrix heiße $\mathfrak{AB}$ und gehört auch zur Menge,
3. für diese Addition und Multiplikation gelten dieselben Rechenregeln wie bei Matrizen mit endlicher Reihenzahl.

Ferner heiße ein unendlicher Matrizenring *maximal*, wenn er nicht als echter Teil in einem anderen enthalten ist.

Jeder maximale Matrizenring enthält alle endlichen Matrizen, d. h. alle Matrizen, unter deren Koeffizienten nur endlichviele Nichtnullen vorkommen, sowie alle Matrizen $r\mathfrak{E}$, wo $\mathfrak{E}$ die Einheitsmatrix [2]). Die Matrizen $r\mathfrak{E}$ bilden das *Zentrum* des Ringes, d. h. die Gesamtheit derjenigen Matrizen, deren jede mit allen Matrizen des Ringes vertauschbar ist. Der Beweis ergibt sich unmittelbar daraus, daß alle endlichen Matrizen im System liegen.

Zwei maximale Matrizenringe heißen *isomorph über ihrem Zentrum*, wenn man sie so eineindeutig aufeinander beziehen kann, daß Summe und Produkt erhalten bleiben und jede Matrix $r\mathfrak{E}$ sich selbst entspricht.

Das System $\Sigma_2$ der beschränkten Matrizen Hilberts war der erste maximale unendliche Matrizenring, dem man begegnet ist. Das System $\Omega$ der zeilenfiniten und das System $\Sigma_\infty$ der zeilenabsoluten Matrizen waren Beispiele, daß es neben diesem einen maximalen Ring noch andere gibt. Eine systematische Aufstellung aller maximalen Matrizenringe hat zur ersten Voraussetzung, daß man isomorphe Ringe als solche erkennen kann und über den Zusammenhang isomorpher Ringe genauer Bescheid weiß. Die Frage nach den *Automorphismen* eines Matrizenringes auf sich ist ein Spezialfall dieses Problems.

Für das System der $n$-reihigen Matrizen ist die Frage nach seinen Automorphismen durch den Satz beantwortet, daß sie alle innere sind, d. h. daß es eine feste intakte [3]) Matrix $\mathfrak{P}$ im Ring gibt, so daß die Transformation $\mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{P} = \mathfrak{B}$ die einer jeden Matrix $\mathfrak{A}$ im Automorphismus zugeordnete Matrix ergibt.

Die Methode der vorliegenden Arbeit ist aus einem genauen Studium des Beweises

[1]) Den Herren O. Toeplitz-Bonn und G. Köthe-Münster habe ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für ihre Ratschläge zu danken.

[2]) Für den Beweis vergleiche die vorhergehende Arbeit von G. Köthe u. O. Toeplitz, § 9. Diese Arbeit wird im folgenden mit K.-T. zitiert.

[3]) Eine $n$-reihige Matrix $\mathfrak{P}$ heißt intakt, wenn es eine Matrix $\mathfrak{Q}$ gibt, für die $\mathfrak{Q}\mathfrak{P} = \mathfrak{E}$ gilt, $\mathfrak{E}$ die Einheitsmatrix.

hervorgegangen, den Herr E. Artin [4]) für ein allgemeineres Theorem über hyperkomplexe Systeme gegeben hat; es mußte für den vorliegenden Spezialfall der Beweisgedanke so herausgearbeitet werden, daß die bei unendlichen Matrizen im Vordergrund stehenden Konvergenzschwierigkeiten überwindbar wurden.

Das Resultat besagt, daß *jeder Isomorphismus zweier maximaler Matrizenringe, bei dem das Zentrum elementweise ungeändert bleibt, ein Transformationsisomorphismus ist* — wie dies bei unendlichen Matrizen zu definieren ist, wird in § 1 alsbald präzise gesagt werden.

Darüber hinaus werden in der Richtung einer wirklichen Aufstellung aller maximalen Matrizenringe zwei Einzelresultate gefunden (§ 4 und § 5):

*Es gibt keinen maximalen Matrizenring, der zu* $\Omega$ *isomorph ist, außer diesem selbst, und ebenso keinen zu* $\Phi$, *dem Ring der spaltenfiniten Matrizen. Die zu* $\Psi$, *dem Ring der halbfiniten* [5]) *Matrizen isomorphen maximalen Matrizenringe ergeben sich aus* $\Psi$ *durch Permutationen.*

G. Köthe und O. Toeplitz [6]) haben das Studium der maximalen Matrizenringe von einem anderen Gesichtspunkt aus angegriffen. Sie gehen von linearen Koordinatenräumen $\lambda$ aus und untersuchen das System $\Sigma(\lambda)$ der linearen Transformationen von $\lambda$ in sich. Sie umgrenzen eine Klasse der „vollkommenen" Räume; bei diesen ist $\Sigma(\lambda)$ stets ein maximaler Matrizenring. Aber nicht jeder maximale Matrizenring im obigen Sinne kommt auf diese Weise heraus. Sie geben ein Beispiel eines maximalen Matrizenringes, der nicht vollkommen ist, d. h. nicht das $\Sigma(\lambda)$ eines vollkommenen Raumes $\lambda$; der Standpunkt der vorliegenden Arbeit ist daher allgemeiner.

In K.-T. wird das Problem der Isomorphismen vollkommener Matrizenringe ebenfalls angegriffen. Es wird dort (§8) gezeigt, daß, falls zwei vollkommene Räume „homöomorph" sind, die zugehörigen vollkommenen Matrizenringe isomorph sind. Die Anwendung der Methoden der vorliegenden Arbeit auf die vollkommenen Matrizenringe (§ 3) liefert nun auch die Umkehrung dieses Resultates, also den Satz:

*Zwei vollkommene Räume sind dann und nur dann homöomorph, wenn die zugehörigen vollkommenen Matrizenringe isomorph sind.*

Für vollkommene Matrizenringe gilt ferner: *Jeder Automorphismus über dem Zentrum eines vollkommenen Matrizenringes ist ein innerer, d. h. kann durch Transformation mit einer Matrix des Ringes erzeugt werden.*

Schließlich sei noch bemerkt, daß die Forderung 2. für einen Matrizenring, die die absolute Konvergenz der Reihen $\sum_{\alpha=1}^{\infty} a_{p\alpha} b_{\alpha q}$ verlangt, in den §§ 1, 2, 4 und 5 durch die schwächere ersetzt werden kann, die nur die gewöhnliche Konvergenz dieser Reihen verlangt. Alle Beweise und Resultate gelten auch dann noch.

## § 1. Der Hauptsatz über isomorphe Matrizenringe.

In der Einleitung wurde die Isomorphie zweier Matrizenringe $\mathsf{M}$ und $\mathsf{M}'$ erklärt. Ein Isomorphismus von $\mathsf{M}$ und $\mathsf{M}'$ heißt speziell ein *Transformationsisomorphismus*, wenn es zwei Matrizen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ gibt, die den Isomorphismus liefern, indem man jeder Matrix $\mathfrak{A}$ aus $\mathsf{M}$ die Matrix $\mathfrak{Q}\mathfrak{A}\mathfrak{P}$ aus $\mathsf{M}'$ zuordnet.

Die Matrix $\mathfrak{Q}\mathfrak{A}\mathfrak{P}$ hat dabei nur dann einen Sinn, wenn die Produkte $\mathfrak{Q}\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{P}$, $(\mathfrak{Q}\mathfrak{A})\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}(\mathfrak{A}\mathfrak{P})$ gebildet werden können, d. h. wenn die bei der Multiplikation auftretenden unendlichen Reihen absolut konvergieren, und wenn $(\mathfrak{Q}\mathfrak{A})\mathfrak{P} = \mathfrak{Q}(\mathfrak{A}\mathfrak{P})$ ist.

[4]) E. Artin, Abh. Math. Sem. Hamburg **5** (1927), S. 251.

[5]) Vgl. G. Köthe u. O. Toeplitz, Theorie der halbfiniten Matrizen, Journal f. Math. **165** (1931), S. 116.

[6]) Vgl. K.-T.

Die folgenden Bedingungen sind hinreichend dafür, daß zwei Matrizen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ einen Matrizenri ng $\mathsf{M}$ in einen isomorphen transformieren [7]):

$\alpha$) $\mathfrak{P}\mathfrak{Q} = \mathfrak{E}$,

$\beta$) $\mathfrak{Q}\mathfrak{P} = \mathfrak{E}$,

$\gamma$) für alle Matrizen $\mathfrak{A}$ aus $\mathsf{M}$ existieren die Produkte $(\mathfrak{Q}\mathfrak{A})\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}(\mathfrak{A}\mathfrak{P})$,

$\delta$) es gilt das assoziative Gesetz $(\mathfrak{Q}\mathfrak{A})\mathfrak{P} = \mathfrak{Q}(\mathfrak{A}\mathfrak{P})$,

$\varepsilon$) es ist $(\mathfrak{Q}\mathfrak{A}_1\mathfrak{P})\,(\mathfrak{Q}\mathfrak{A}_2\mathfrak{P}) = \mathfrak{Q}(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2)\mathfrak{P}$.

Wir formulieren nun den

**Hauptsatz:** *Jeder Isomorphismus zweier maximalen Matrizenringe* $\mathsf{M}$ *und* $\mathsf{M}'$ *über ihrem Zentrum ist ein Transformationsisomorphismus* [8]).

1. Der Beweis wird durchsichtiger, wenn man ihm folgende Analysis vorausschickt: $\mathfrak{C}_{\alpha\beta}$ sei die Matrix, die in dem Schnitt der $\alpha$-ten Zeile mit der $\beta$-ten Spalte eine Eins, sonst überall Null stehen hat. Da $\mathsf{M}$ maximal ist, enthält es alle endlichen Matrizen, also liegen alle $\mathfrak{C}_{\alpha\beta}$ in $\mathsf{M}$. Gesetzt also, der Hauptsatz wäre bewiesen und $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ seien die beiden Matrizen, die den gegebenen Isomorphismus $I$ von $\mathsf{M}$ auf $\mathsf{M}'$ vermitteln. Wir wollen uns überlegen, wie die Matrizen $\mathfrak{Q}\,\mathfrak{C}_{\alpha\beta}\,\mathfrak{P}$ aussehen. Es ist

$$\mathfrak{C}_{\alpha\beta}\,\mathfrak{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ p_{\beta 1} & p_{\beta 2} & p_{\beta 3} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} (\alpha);$$

das eingeklammerte $\alpha$ gibt an, daß die $p_{\beta i}$ in der $\alpha$-ten Zeile stehen. Folglich ist

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{C}_{\alpha\beta}\,\mathfrak{P} = \begin{pmatrix} q_{1\alpha}p_{\beta 1} & q_{1\alpha}p_{\beta 2} & q_{1\alpha}p_{\beta 3}\cdot \\ q_{2\alpha}p_{\beta 1} & q_{2\alpha}p_{\beta 2} & q_{2\alpha}p_{\beta 3}\cdot \\ q_{3\alpha}p_{\beta 1} & q_{3\alpha}p_{\beta 2} & q_{3\alpha}p_{\beta 3}\cdot \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

*also vom Range eins*, denn die Zeilen sind der $\beta$-ten Zeile von $\mathfrak{P}$ proportional, die Spalten der $\alpha$-ten Spalte von $\mathfrak{Q}$.

Der Gang des Beweises wird nun der sein, die vermöge $I$ den Matrizen $\mathfrak{C}_{\alpha\beta}$ entsprechenden $\mathfrak{C}'_{\alpha\beta}$ aus $\mathsf{M}'$ zu betrachten, zu beweisen, daß sie auch bei einem abstrakten Isomorphismus den Rang eins haben müssen, und aus ihren bis auf einen Proportionalitätsfaktor bestimmten Zeilen und Spalten die Transformatoren $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ zu konstruieren.

2. *Beweis, daß* $\mathfrak{C}'_{\alpha\beta}$ *vom Range eins ist.*

Sei $\mathfrak{X}$ eine beliebige Matrix aus $\mathsf{M}$, so ist $\mathfrak{C}_{\alpha\beta}\mathfrak{X}$ eine Matrix, die außer der $\alpha$-ten Zeile nur Nullen hat. Ist $\mathfrak{C}_{\alpha\beta}\mathfrak{X} \neq \mathfrak{O}$, $\mathfrak{O}$ die Nullmatrix, so kann man eine andere Matrix $\mathfrak{Y}$ aus $\mathsf{M}$ finden, so daß $\mathfrak{C}_{\alpha\beta}\mathfrak{X}\mathfrak{Y} = \mathfrak{C}_{\alpha\beta}$ ist. Sei nämlich $u_{\alpha q}$ irgendein Element in der $\alpha$-ten Zeile von $\mathfrak{C}_{\alpha\beta}\mathfrak{X}$, das nicht verschwindet, so ist $\mathfrak{C}_{\alpha\beta}\mathfrak{X}\mathfrak{C}_{q\alpha}\cdot\dfrac{1}{u_{\alpha q}} = \mathfrak{C}_{\alpha\alpha}$ und daher $\mathfrak{C}_{\alpha\beta}\mathfrak{X}\cdot\dfrac{1}{u_{\alpha q}}\mathfrak{C}_{q\alpha}\mathfrak{C}_{\alpha\beta} = \mathfrak{C}_{\alpha\beta}$. Also $\dfrac{1}{u_{\alpha q}}\mathfrak{C}_{q\alpha}\mathfrak{C}_{\alpha\beta} = \dfrac{1}{u_{\alpha q}}\mathfrak{C}_{q\beta}$ ist die gesuchte Matrix $\mathfrak{Y}$, die als endliche Matrix in $\mathsf{M}$ liegt. Ist jetzt $\mathfrak{C}'_{\alpha\beta}$ die $\mathfrak{C}_{\alpha\beta}$ in $\mathsf{M}'$ entsprechende Matrix, so existiert wegen des Isomorphismus zu jeder beliebig aus $\mathsf{M}'$ vor-

[7]) Vgl. E. Hellinger u. O. Toeplitz, Math. Ann. **69** (1909), S. 329.

[8]) Wir beweisen in Wirklichkeit sogar etwas mehr. Die Tatsache, daß $\mathsf{M}$ und $\mathsf{M}'$ maximal sind, wird für den Beweis gar nicht gebraucht, vielmehr nur die in der Einleitung erwähnten Folgerungen, daß alle endlichen Matrizen und die Matrizen $r\mathfrak{E}$ im Ring liegen. Der Hauptsatz gilt also auch dann schon, wenn von $\mathsf{M}$ und $\mathsf{M}'$ nur dies vorausgesetzt wird.

gegebenen Matrix $\mathfrak{X}'$ eine andere Matrix $\mathfrak{Y}'$ in $\mathsf{M}'$, so daß $\mathfrak{C}'_{\alpha\beta}\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}' = \mathfrak{C}'_{\alpha\beta}$, falls $\mathfrak{C}'_{\alpha\beta}\mathfrak{X}' \neq \mathfrak{O}$ ist. Gesetzt nun, $\mathfrak{C}'_{\alpha\beta}$ hätte nicht den Rang eins, sondern etwa die $p$-te und $q$-te Zeile davon wären einander nicht proportional, dann kann man Zahlen $u_1, u_2, \ldots$ finden, die mit der $p$-ten Zeile komponiert Null, mit der $q$-ten komponiert Eins ergeben. Alle $u_i$ können bis auf zwei gleich Null angenommen werden. Nun sei

$$\mathfrak{U} = \begin{pmatrix} u_1 & 0 & 0 & \cdot \\ u_2 & 0 & 0 & \cdot \\ u_3 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

$\mathfrak{U}$ ist als endliche Matrix in $\mathsf{M}'$ enthalten. $\mathfrak{C}'_{\alpha\beta}\mathfrak{U} = \mathfrak{V}$ ist eine Matrix aus $\mathsf{M}'$, die ebenfalls außerhalb der ersten Spalte nur Nullen hat und $v_{p1} = 0$, $v_{q1} = 1$ aufweist. $\mathfrak{C}'_{\alpha\beta}\mathfrak{U}\mathfrak{W} = \mathfrak{V}\mathfrak{W}$ besitzt also in der $p$-ten Zeile stets lauter Nullen für alle $\mathfrak{W}$ aus $\mathsf{M}'$. Wählt man also das obige $\mathfrak{X}' = \mathfrak{U}$, womit man sicher ist, daß $\mathfrak{C}'_{\alpha\beta}\mathfrak{X}' \neq \mathfrak{O}$ ausfällt (wegen $v_{q1} = 1$), und $\mathfrak{W}$ gleich dem obigen $\mathfrak{Y}'$, so erhält man den Widerspruch, daß $\mathfrak{C}'_{\alpha\beta}$ in der $p$-ten Zeile lauter Nullen haben müßte.

3. *Aufstellung der Transformatoren.*

Alle Zeilen von $\mathfrak{C}'_{\alpha\alpha}$ sind also zueinander proportional. Möglicherweise besteht die erste Zeile von $\mathfrak{C}'_{\alpha\alpha}$ aus lauter Nullen. Aber es kann dies nicht für alle Zeilen von $\mathfrak{C}'_{\alpha\alpha}$ zutreffen; denn sonst wäre $\mathfrak{C}'_{\alpha\alpha}$ und damit $\mathfrak{C}_{\alpha\alpha}$ gleich Null. Seien $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ die Größen der obersten nicht aus lauter Nullen bestehenden Zeile von $\mathfrak{C}'_{\alpha\alpha}$, es sei dies die $k_\alpha$-te Zeile, dann wird die $p$-te Zeile von $\mathfrak{C}'_{\alpha\alpha}$ ihr proportional, etwa gleich $\mu_p\lambda_1, \mu_p\lambda_2, \ldots$, also

$$(1)\quad \mathfrak{C}'_{\alpha\varrho} = (\mu_p\lambda_q) = \begin{pmatrix} 0 & \cdot & 0 & \mu_1 & 0 & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & \mu_2 & 0 & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & \mu_3 & 0 & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & \mu_4 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \mathfrak{B}^{(\alpha)'} \cdot {}^{(\alpha)}\mathfrak{A}' \cdot$$

$\mathfrak{B}^{(\alpha)'}$ und ${}^{(\alpha)}\mathfrak{A}'$ sind Matrizen aus $\mathsf{M}'$; denn es ist ${}^{(\alpha)}\mathfrak{A}' = \mathfrak{C}_{\alpha k_\alpha}\mathfrak{C}'_{\alpha\alpha}$, $\mathfrak{B}^{(\alpha)'} = \frac{1}{\lambda_n}\mathfrak{C}'_{\alpha\alpha}\cdot\mathfrak{C}_{n\alpha}$, wenn $\lambda_n$ das erste nicht verschwindende $\lambda$ ist. Hat eine Matrix außerhalb der $\nu$-ten Zeile keine von Null verschiedenen Elemente, so wollen wir sie als solche dadurch kenntlich machen, daß wir links oben den Index $\nu$ anfügen. Besitzt die Matrix außerhalb der $\nu$-ten Spalte keine von Null verschiedenen Elemente, so schreiben wir den Index rechts oben. Für die Matrizen ${}^{(1)}\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}^{(1)'}$ wollen wir jedoch in diesem Beweise einfach $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ schreiben.

Auf Grund dieser Vorbemerkungen können wir jetzt die Transformatoren $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ unter passender Verfügung über die in der vorausgeschickten Analysis noch offen gebliebenen Proportionalitätsfaktoren folgendermaßen konstruieren. Wegen $\mathfrak{C}_{11}\mathfrak{C}_{1i} = \mathfrak{C}_{1i}$ ist isomorph $\mathfrak{C}'_{11}\mathfrak{C}'_{1i} = \mathfrak{C}'_{1i}$, und daher $\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'_{1i} = \mathfrak{C}_{1k_1}\mathfrak{C}'_{11}\mathfrak{C}'_{1i} = \mathfrak{C}_{1k_1}\mathfrak{C}'_{1i}$ eine Matrix, bei der höchstens die erste Zeile nicht aus lauter Nullen besteht, und zwar besteht sie aus den Größen der $k_1$-ten Zeile von $\mathfrak{C}'_{1i}$. Daher wird $\mathfrak{C}_{i1}\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'_{1i}$ eine Matrix sein, die die $k_1$-te Zeile von $\mathfrak{C}'_{1i}$ als $i$-te Zeile aufweist und sonst lauter Nullen. Die Summe

$$(2)\qquad \mathfrak{P} = \sum_{i=1}^{\infty}\mathfrak{C}_{i1}\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'_{1i}$$

hat also Sinn, denn jeder Summand steuert nur eine Zeile und jeder eine andere bei. Außerdem ist jede Zeile von $\mathfrak{P}$ Zeile einer Matrix von $\mathsf{M}'$. Wir bilden den anderen Transformator nach Analogie:

$$\mathfrak{Q} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{C}'_{k1}\mathfrak{B}'\mathfrak{C}_{1k}\,. \tag{3}$$

Er ist aus lauter Spalten aufgebaut, die Spalten von Matrizen aus M′ sind.

4. Dem Nachweis der charakteristischen Eigenschaften $\alpha$) bis $\varepsilon$) der beiden Transformatoren schicken wir voraus den folgenden

**Hilfssatz 1:** *Es ist*

$$^{(\alpha)}\mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{B}^{(\alpha)'} = \mathfrak{C}_{\alpha\alpha}\,, \tag{4}$$

*also speziell* $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}' = \mathfrak{C}_{11}$.

*Beweis*: Die Matrix $^{(\alpha)}\mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{B}^{(\alpha)'}$ besitzt nur ein Element ungleich Null, nämlich das an der Stelle $(\alpha, \alpha)$, und dieses ist $\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \cdots$. Genau diese Summe tritt aber auf, wenn man $\mathfrak{C}'_{\alpha\alpha} \cdot \mathfrak{C}'_{\alpha\alpha}$ bildet. Man erhält dann $\mathfrak{C}'^2_{\alpha\alpha} = (\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \cdots)\mathfrak{C}'_{\alpha\alpha}$. Nun ist $\mathfrak{C}^2_{\alpha\alpha} = \mathfrak{C}_{\alpha\alpha}$ und daher isomorph $\mathfrak{C}'^2_{\alpha\alpha} = \mathfrak{C}'_{\alpha\alpha}$ und mithin $\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \cdots = 1$. Das Element an der Stelle $(\alpha, \alpha)$ von $^{(\alpha)}\mathfrak{A}'\mathfrak{B}^{(\alpha)'}$, das einzige, das nicht Null war, hat also genau den Wert Eins, d. h. $^{(\alpha)}\mathfrak{A}'\mathfrak{B}^{(\alpha)'}$ ist nichts anderes als $\mathfrak{C}_{\alpha\alpha}$.

5. Auf Grund dieses Hilfssatzes gilt nun

$$\alpha) \qquad \mathfrak{P}\mathfrak{Q} = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{C}_{i1}\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'_{1i}\Big)\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{C}'_{k1}\mathfrak{B}'\mathfrak{C}_{1k}\Big) = \mathfrak{E}\,.$$

Beweis: Das allgemeine Element ist aus der $i$-ten Zeile von $\mathfrak{P}$ und der $k$-ten Spalte von $\mathfrak{Q}$ zu komponieren. Aber die $i$-te Zeile von $\mathfrak{P}$ ist die $i$-te von $\mathfrak{C}_{i1}\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'_{1i}$, das sonst nur Nullen aufweist, und die $k$-te Spalte von $\mathfrak{Q}$ ist die $k$-te von $\mathfrak{C}'_{k1}\mathfrak{B}'\mathfrak{C}_{1k}$, das sonst nur Nullen aufweist. Mithin liefert $(\mathfrak{C}_{i1}\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'_{1i})(\mathfrak{C}'_{k1}\mathfrak{B}'\mathfrak{C}_{1k})$ eine Matrix mit nur einem Element, und dieses ist das $(i, k)$-te Element von $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$. Hier sind nun lauter Matrizen aus M′ multipliziert, und das assoziative Gesetz darf angewendet werden. Es ist

$$(\mathfrak{C}_{i1}\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'_{1i})(\mathfrak{C}'_{k1}\mathfrak{B}'\mathfrak{C}_{1k}) = \begin{cases} \mathfrak{C}_{i1}\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'_{1i}\mathfrak{C}'_{i1}\mathfrak{B}'\mathfrak{C}_{1i} & \text{für } i = k \\ \mathfrak{O} & \text{für } i \neq k, \end{cases}$$

und im Falle $i = k$ ist wegen $\mathfrak{C}'_{11} = \mathfrak{B}'\mathfrak{A}'$ und Hilfssatz 1

$$\mathfrak{C}_{i1}\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'_{1i}\mathfrak{C}'_{i1}\mathfrak{B}'\mathfrak{C}_{1i} = \mathfrak{C}_{i1}\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'_{11}\mathfrak{B}'\mathfrak{C}_{1i} = \mathfrak{C}_{i1}\mathfrak{A}'(\mathfrak{B}'\mathfrak{A}')\mathfrak{B}'\mathfrak{C}_{1i} = \mathfrak{C}_{i1}(\mathfrak{A}'\mathfrak{B}')(\mathfrak{A}'\mathfrak{B}')\mathfrak{C}_{1i} = \mathfrak{C}_{ii}\,.$$

Also existiert $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ im Sinne der Produktdefinition unendlicher Matrizen, und es ist $\mathfrak{P}\mathfrak{Q} = \mathfrak{E}$. Die Eigenschaft $\alpha$) ist damit bewiesen.

6. Wollen wir nun $(\mathfrak{Q}\mathfrak{C}_{\alpha\beta})\mathfrak{P}$ bilden, so ist $\mathfrak{Q}\mathfrak{C}_{\alpha\beta}$ nichts anderes als die Matrix, die die $\alpha$-te Spalte von $\mathfrak{Q}$ als $\beta$-te Spalte und sonst nur Nullen enthält, also nach (3) die Matrix $(\mathfrak{C}'_{\alpha1}\mathfrak{B}'\mathfrak{C}_{1\alpha})\mathfrak{C}_{\alpha\beta}$. Wenn wir jetzt die Zeilen hiervon mit den Spalten von $\mathfrak{P}$ komponieren, wird aus jeder Spalte von $\mathfrak{P}$ immer nur das $\beta$-te Element getroffen, d. h. es ist genau so, als würde in $\mathfrak{P}$ nur die $\beta$-te Zeile beibehalten, also $\mathfrak{C}_{\beta1}\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'_{1\beta}$. Es ist daher

$$\begin{aligned} (\mathfrak{Q}\mathfrak{C}_{\alpha\beta})\mathfrak{P} &= [(\mathfrak{C}'_{\alpha1}\mathfrak{B}'\mathfrak{C}_{1\alpha})\mathfrak{C}_{\alpha\beta}]\,(\mathfrak{C}_{\beta1}\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'_{1\beta}) \\ &= \mathfrak{C}'_{\alpha1}\mathfrak{B}'\,(\mathfrak{C}_{1\alpha}\mathfrak{C}_{\alpha\beta}\mathfrak{C}_{\beta1})\,\mathfrak{A}'\,\mathfrak{C}'_{1\beta} \\ &= \mathfrak{C}'_{\alpha1}\mathfrak{B}'\mathfrak{C}_{11}\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'_{1\beta} \\ \text{(nach Hilfssatz 1)} \qquad &= \mathfrak{C}'_{\alpha1}\mathfrak{B}'\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'_{1\beta} \\ &= \mathfrak{C}'_{\alpha1}\mathfrak{C}'^2_{11}\mathfrak{C}'_{1\beta} \\ &= \mathfrak{C}'_{\alpha\beta}\,. \end{aligned}$$

Genau so zeigt man, daß $\mathfrak{Q}(\mathfrak{C}_{\alpha\beta}\mathfrak{P}) = \mathfrak{C}'_{\alpha\beta}$ ist, also

$$(\mathfrak{Q}\mathfrak{C}_{\alpha\beta})\mathfrak{P} = \mathfrak{Q}(\mathfrak{C}_{\alpha\beta}\mathfrak{P}) = \mathfrak{C}'_{\alpha\beta}\,. \tag{5}$$

$\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ sind für $\mathfrak{C}_{\alpha\beta}$ also die richtigen Transformatoren.

Für später sei angemerkt, daß man von vornherein in (1) $^{(\alpha)}\mathfrak{A}' = \mathfrak{C}_{\alpha1}\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'_{1\alpha}$ und $\mathfrak{B}^{(\alpha)'} = \mathfrak{C}'_{\alpha1}\mathfrak{B}'\mathfrak{C}_{1\alpha}$ wählen kann; denn wir haben ja eben nachgewiesen, daß dann

$\mathfrak{B}^{(\alpha)'} \cdot {}^{(\alpha)}\mathfrak{A}' = \mathfrak{C}'_{\alpha\alpha}$ ist, die neuen $\mathfrak{B}^{(\alpha)'}$ und ${}^{(\alpha)}\mathfrak{A}'$ unterscheiden sich von den alten daher höchstens um einen konstanten Faktor.

7. Ist M das System aller $n$-reihigen Matrizen, so genügt das bisher Gezeigte zum vollen Beweise. Denn aus $\alpha$) folgt jetzt $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}=\mathfrak{E}$ von selbst, und aus (5) folgt für irgendeine Matrix $\mathfrak{C} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} c_{\alpha\beta}\mathfrak{C}_{\alpha\beta}$ durch Summation über alle — endlich viele — $\alpha$, $\beta$:

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{P} = \mathfrak{Q}\,(\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} c_{\alpha\beta}\mathfrak{C}_{\alpha\beta})\mathfrak{P} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} c_{\alpha\beta}\,\mathfrak{Q}\mathfrak{C}_{\alpha\beta}\,\mathfrak{P} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} c_{\alpha\beta}\,\mathfrak{C}'_{\alpha\beta}\,,$$

und dies ist $\mathfrak{C}'$, weil der Summe die Summe entspricht. Daß $\mathsf{M} = \mathsf{M}'$ ist, folgt daraus, daß $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ nach Konstruktion $n$-reihige Matrizen sind.

8. Für Ringe von unendlichen Matrizen weiß man noch nicht einmal, ob das Produkt $\mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{P}$, $\mathfrak{C}$ eine beliebige Matrix aus M, überhaupt gebildet werden kann. Um dies nachzuweisen, brauchen wir

**Hilfssatz 2:** *Die Matrizen* $\mathfrak{C}_{\alpha\alpha}\mathfrak{Q}$ *und* $\mathfrak{P}\mathfrak{C}_{\alpha\alpha}$ *sind Matrizen aus* M [9]).

*Beweis*: Es ist

$$\mathfrak{C}_{\alpha\alpha}\mathfrak{Q} = \mathfrak{C}_{\alpha\alpha}\,(\sum_{i}\mathfrak{C}'_{i1}\,\mathfrak{B}'\,\mathfrak{C}_{1i}) = \sum_{i}(\mathfrak{C}_{\alpha\alpha}\,\mathfrak{C}'_{i1}\,\mathfrak{B}'\,\mathfrak{C}_{1i})\,.$$

Jeder einzelne Summand liefert genau ein Element der Matrix. Nun ist

$$\mathfrak{C}_{\alpha\alpha}\,\mathfrak{C}'_{i1}\,\mathfrak{B}'\,\mathfrak{C}_{1i} = (\mathfrak{C}_{\alpha\alpha}\,\mathfrak{C}'_{i1})\,\mathfrak{B}'\,\mathfrak{C}_{1i}\,. \tag{6}$$

Wir untersuchen die Matrix $\mathfrak{C}_{\alpha\alpha}\mathfrak{C}'_{i1}$. Wir bezeichnen den zu $I$ inversen Isomorphismus mit $I^{-1}$, die der Matrix $\mathfrak{A}$ aus M′ durch $I^{-1}$ in M zugeordnete Matrix mit $\mathfrak{A}^*$. Es ist $(\mathfrak{C}_{\alpha\alpha}\mathfrak{C}'_{i1})^* = \mathfrak{C}^*_{\alpha\alpha}\mathfrak{C}_{i1}$. $\mathfrak{C}^*_{\alpha\alpha}$ zerfällt nach den Überlegungen in 3. in der Form $\mathfrak{V}^{(\alpha)} \cdot {}^{(\alpha)}\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}^{(\alpha)}$ und ${}^{(\alpha)}\mathfrak{U}$ Matrizen aus M. Es ist $\mathfrak{C}^*_{\alpha\alpha}\mathfrak{C}_{i1}$ also gleich $\mathfrak{V}^{(\alpha)} \cdot {}^{(\alpha)}\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{C}_{i1} = \mathfrak{V}^{(\alpha)} \cdot u_{\alpha i} \cdot \mathfrak{C}_{\alpha 1}$. Wir machen $I^{-1}$ wieder rückgängig. Es wird dadurch $\mathfrak{C}_{\alpha\alpha}\mathfrak{C}'_{i1} = u_{\alpha i}\,\mathfrak{V}^{(\alpha)'} \cdot \mathfrak{C}'_{\alpha 1}$. Wir setzen in (6) ein:

$$(u_{\alpha i}\,\mathfrak{V}^{(\alpha)'}\mathfrak{C}'_{\alpha 1}) \cdot \mathfrak{B}'\,\mathfrak{C}_{1i} = u_{\alpha i}[\,(\mathfrak{V}^{(\alpha)'}\,\mathfrak{C}'_{\alpha 1})\,\mathfrak{B}']\,\mathfrak{C}_{1i}\,.$$

$(\mathfrak{V}^{(\alpha)'}\,\mathfrak{C}'_{\alpha 1})\mathfrak{B}'$ hat höchstens an der Stelle $(\alpha, 1)$ einen von Null verschiedenen, von $i$ unabhängigen Koeffizienten $c_\alpha$, denn $\mathfrak{C}_{\alpha\alpha}\,\mathfrak{C}'_{i1}\,\mathfrak{B}' = u_{\alpha i}(\mathfrak{V}^{(\alpha)'}\,\mathfrak{C}'_{\alpha 1}\,\mathfrak{B}')$ gilt für jedes $i$, insbesondere also auch für ein solches, für das $u_{\alpha i} \neq 0$ ist (alle $u_{\alpha i}$ können nicht gleich Null sein); die linke Seite der Gleichung ist aber eine Matrix mit höchstens einem von Null verschiedenen Element an der Stelle $(\alpha, 1)$. Es wird also für alle $i$

$$u_{\alpha i}(\mathfrak{V}^{(\alpha)'}\,\mathfrak{C}'_{\alpha 1}\,\mathfrak{B}')\,\mathfrak{C}_{1i} = u_{\alpha i}\,c_\alpha\,\mathfrak{C}_{\alpha i}\,.$$

Daraus folgt $\mathfrak{C}_{\alpha\alpha}\mathfrak{Q} = \sum_{i=1}^{\infty}\mathfrak{C}_{\alpha\alpha}\,\mathfrak{C}'_{i1}\,\mathfrak{B}'\mathfrak{C}_{1i} = c_\alpha \sum_{i=1}^{\infty} u_{\alpha i}\,\mathfrak{C}_{\alpha i} = c_\alpha^{(\alpha)}\,\mathfrak{U}$. ${}^{(\alpha)}\mathfrak{U}$ war aber aus M, und damit ist auch $\mathfrak{C}_{\alpha\alpha}\mathfrak{Q}$ aus M. Für $\mathfrak{P}\mathfrak{C}_{\alpha\alpha}$ ist der Beweis analog, es wird $\mathfrak{P}\mathfrak{C}_{\alpha\alpha} = d_\alpha\,\mathfrak{V}^{(\alpha)}$.

Daß $\overline{\mathfrak{C}} = \mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{P}$ gebildet werden kann, folgt nun so: Das Element $\bar{c}_{\alpha\beta}$ von $\overline{\mathfrak{C}}$ bekommt man, indem man das $(\alpha, \beta)$-te Element der Matrix

$$(\alpha)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ q_{\alpha 1} & q_{\alpha 2} & q_{\alpha 3} & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \mathfrak{C} \begin{pmatrix} 0 & \cdot & 0 & p_{1\beta} & 0 & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & p_{2\beta} & 0 & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & p_{3\beta} & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad (\beta)$$

[9]) Wir erinnern daran, daß $\mathfrak{Q}\mathfrak{C}_{\alpha\alpha}$ und $\mathfrak{C}_{\alpha\alpha}\mathfrak{P}$ in M′ liegen. Wir bekommen hier eine neue Aussage über die Struktur der Transformatoren.

bildet. Das Produkt dieser drei Matrizen, das nach Hilfssatz 2 Produkt dreier Matrizen aus M ist, kann aber gebildet werden, also auch die Matrix $\mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{P}$, und zwar ist

$$\delta) \qquad (\mathfrak{Q}\mathfrak{C})\mathfrak{P} = \mathfrak{Q}(\mathfrak{C}\mathfrak{P}).$$

9. Alles was zum Beweise unseres Satzes noch zu zeigen ist, ist $\overline{\mathfrak{C}} = \mathfrak{C}'$. Denn $\mathfrak{Q}\mathfrak{P} = \mathfrak{E}$ folgt daraus: Die Einheitsmatrix geht beim Isomorphismus in sich selbst über, d. h. $\mathfrak{Q}\mathfrak{E}\mathfrak{P} = \mathfrak{Q}\mathfrak{P} = \mathfrak{E}$. Ebenso folgt schließlich die Richtigkeit von $\varepsilon)$, da $I$ ja als Isomorphismus vorausgesetzt ist.

Wir untersuchen jetzt die Matrix, die an der Stelle $(\alpha, \beta)$ das Element $c'_{\alpha\beta}$ von $\mathfrak{C}'$ und sonst nur Nullen hat. Es ist

$$c'_{\alpha\beta}\,\mathfrak{C}_{\alpha\beta} = \mathfrak{C}_{\alpha\alpha}\,\mathfrak{C}'\,\mathfrak{C}_{\beta\beta}\,.$$

Auf diese Matrix üben wir $I^{-1}$ aus. Dann wird $c'_{\alpha\beta}\,\mathfrak{C}^*_{\alpha\beta} = \mathfrak{C}^*_{\alpha\alpha}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{C}^*_{\beta\beta}$, also nach 8. gleich $(\mathfrak{V}^{(\alpha)}\,{}^{(\alpha)}\mathfrak{U})\,\mathfrak{C}(\mathfrak{V}^{(\beta)}\,{}^{(\beta)}\mathfrak{U})$ und, da dieses alles Matrizen aus M sind, gleich $\mathfrak{V}^{(\alpha)}({}^{(\alpha)}\mathfrak{U}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{V}^{(\beta)})\,{}^{(\beta)}\mathfrak{U}$.

Nun hat die Matrix ${}^{(\alpha)}\mathfrak{U}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{V}^{(\beta)}$ nur an der Stelle $(\alpha, \beta)$ ein von Null verschiedenes Element. Wir bezeichnen es mit $x_{\alpha\beta}$. Es ist also

$${}^{(\alpha)}\mathfrak{U}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{V}^{(\beta)} = x_{\alpha\beta}\,\mathfrak{C}_{\alpha\beta}$$

und daher $c'_{\alpha\beta}\,\mathfrak{C}^*_{\alpha\beta} = \mathfrak{V}^{(\alpha)}(x_{\alpha\beta}\,\mathfrak{C}_{\alpha\beta})\,{}^{(\beta)}\mathfrak{U} = x_{\alpha\beta}(\mathfrak{V}^{(\alpha)}\,\mathfrak{C}_{\alpha\beta}\,{}^{(\beta)}\mathfrak{U})$. Wenn wir $\mathfrak{V}^{(\alpha)}$ und ${}^{(\beta)}\mathfrak{U}$ entsprechend der Bemerkung am Schluß von 6. wählen, also ${}^{(\beta)}\mathfrak{U} = \mathfrak{C}_{\beta 1}\,\mathfrak{U}\,\mathfrak{C}^*_{1\beta}$ und $\mathfrak{V}^{(\alpha)} = \mathfrak{C}^*_{\alpha 1}\,\mathfrak{V}\,\mathfrak{C}_{1\alpha}$, so wird

$$(7) \qquad \mathfrak{V}^{(\alpha)}\,\mathfrak{C}_{\alpha\beta}\,{}^{(\beta)}\mathfrak{U} = \mathfrak{C}^*_{\alpha\beta}\,,$$

also

$$(8) \qquad c'_{\alpha\beta}\,\mathfrak{C}^*_{\alpha\beta} = x_{\alpha\beta}\,\mathfrak{C}^*_{\alpha\beta}\,.$$

Hieraus folgt $c'_{\alpha\beta} = x_{\alpha\beta}$. Das Element an der Stelle $(\alpha, \beta)$ von $\mathfrak{C}'$ ist also gleich dem einzigen nicht von Null verschiedenen Element von ${}^{(\alpha)}\mathfrak{U}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{V}^{(\beta)}$. Nun ist, wie wir in 8. gesehen haben, ${}^{(\alpha)}\mathfrak{U}$ bis auf eine Konstante $c_\alpha$ nichts anderes als die Matrix, die in der $\alpha$-ten Zeile die $\alpha$-te Zeile von $\mathfrak{Q}$ und sonst Nullen besitzt, $\mathfrak{V}^{(\beta)}$ bis auf eine Konstante $d_\beta$ die Matrix, die die $\beta$-te Spalte von $\mathfrak{P}$ in der $\beta$-ten Spalte und sonst Nullen aufweist. Das $(\alpha, \beta)$-te Element von $\mathfrak{C}'$ bekommt man also, indem man das $(\alpha, \beta)$-te Element der Matrix

$$\frac{1}{c_\alpha d_\beta} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{\alpha 1} & q_{\alpha 2} & q_{\alpha 3} & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \mathfrak{C} \begin{pmatrix} 0 & \cdot & 0 & p_{1\beta} & 0 & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & p_{2\beta} & 0 & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & p_{3\beta} & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

bildet, das ist aber das mit der Konstanten $\frac{1}{c_\alpha d_\beta}$ multiplizierte $(\alpha, \beta)$-te Element von $\mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{P}$. Wir zeigen jetzt noch, daß $c_\alpha d_\beta = 1$ ist.

Nach 8. ist $\mathfrak{V}^{(\alpha)'}\,\mathfrak{C}'_{\alpha 1}\,\mathfrak{B}' = c_\alpha\,\mathfrak{C}_{\alpha 1}$. Analog ist $\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'_{1\beta}\,{}^{(\beta)}\mathfrak{U}' = d_\beta\,\mathfrak{C}_{1\beta}$. Nun wird $c_\alpha\,\mathfrak{C}_{\alpha 1} \cdot d_\beta\,\mathfrak{C}_{1\beta} = c_\alpha d_\beta\,\mathfrak{C}_{\alpha\beta}$. Andererseits ist das Produkt der linken Seiten

$$\mathfrak{V}^{(\alpha)'}\mathfrak{C}'_{\alpha 1}\,\mathfrak{B}'\,\mathfrak{A}'\,\mathfrak{C}'_{1\beta}\,{}^{(\beta)}\mathfrak{U}' = \mathfrak{V}^{(\alpha)'}\,\mathfrak{C}'_{\alpha 1}\,\mathfrak{C}'_{11}\,\mathfrak{C}'_{1\beta}\,{}^{(\beta)}\mathfrak{U}' = \mathfrak{V}^{(\alpha)'}\,\mathfrak{C}'_{\alpha\beta}\,{}^{(\beta)}\mathfrak{U}' = (\mathfrak{V}^{(\alpha)}\,\mathfrak{C}_{\alpha\beta}\,{}^{(\beta)}\mathfrak{U})'$$
$$(\text{nach } (7)) = (\mathfrak{C}^*_{\alpha\beta})' = \mathfrak{C}_{\alpha\beta}\,,$$

daher ist $c_\alpha d_\beta = 1$. Damit ist $\mathfrak{C}' = \mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{P}$, also der Hauptsatz in allen Teilen bewiesen.

**Korollar 1:** *Die Matrizen* $\mathfrak{P}$ *und* $\mathfrak{Q}$ *sind bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt.*

Wenn $\bar{\mathfrak{P}}$ und $\bar{\mathfrak{Q}}$ zwei Matrizen sind, die den Isomorphismus $I$ vermitteln und die Eigenschaften $\alpha$) bis $\varepsilon$) besitzen, so muß speziell $(\bar{\mathfrak{Q}}\mathfrak{C}_{ik})\bar{\mathfrak{P}} = \mathfrak{C}'_{ik}$ sein. $\bar{\mathfrak{Q}}\mathfrak{C}_{ik}$ ist eine Matrix, die nur aus einer Spalte besteht. Die Zeilen von $(\bar{\mathfrak{Q}}\mathfrak{C}_{ik})\bar{\mathfrak{P}}$ sind also Vielfache der $k$-ten Zeile von $\bar{\mathfrak{P}}$. $\mathfrak{C}'_{ik}$ ist daher gleich dem Produkt einer Matrix, die als $k$-te Spalte die $i$-te Spalte von $\bar{\mathfrak{Q}}$ hat, sonst nur Nullen, mit einer Matrix, die als $k$-te Zeile die $k$-te Zeile von $\bar{\mathfrak{P}}$ besitzt. Die erste Zeile von $\bar{\mathfrak{P}}$ ist also bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt als eine Zeile ungleich Null von $\mathfrak{C}'_{11}$. Wählen wir diese Zeile fest, so sind jetzt durch die obigen Zerlegungen der $\mathfrak{C}'_{k1}$ alle Spalten von $\bar{\mathfrak{Q}}$ vollkommen bestimmt und durch diese wiederum die übrigen Zeilen von $\bar{\mathfrak{P}}$. Also sind $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ wirklich genau bis auf einen konstanten Faktor bestimmt.

Es sei noch bemerkt, daß wir bei diesem Beweise nur die Eigenschaft $(\bar{\mathfrak{Q}}\mathfrak{C}_{ik})\bar{\mathfrak{P}} = \mathfrak{C}'_{ik}$ der Transformatoren benutzt haben, daß also $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ bereits durch diese Forderung bis auf einen Faktor bestimmt sind.

**Korollar 2:** *Der zu* $I$ *inverse Isomorphismus* $I^{-1}$ *von* $\mathsf{M}'$ *auf* $\mathsf{M}$ *wird ebenfalls durch* $\mathfrak{P}$ *und* $\mathfrak{Q}$ *vermittelt, wobei die Rollen von* $\mathfrak{P}$ *und* $\mathfrak{Q}$ *aber zu vertauschen sind.*

Nach dem Hauptsatz gibt es zwei Matrizen, die den Isomorphismus vermitteln. Nach der Bemerkung am Schluß von Korollar 1 genügt es daher nachzuweisen, daß $(\mathfrak{P}\mathfrak{C}_{ik})\mathfrak{Q} = \mathfrak{C}^*_{ik}$ ist. Nun ist nach 8. $\mathfrak{P} = \sum_{i=1}^{\infty} d_i\, \mathfrak{V}^{(i)}$ und $\mathfrak{Q} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, {}^{(k)}\mathfrak{U}$. Daraus folgt, daß $(\mathfrak{P}\mathfrak{C}_{ik})\mathfrak{Q} = (d_i\mathfrak{V}^{(i)}\mathfrak{C}_{ik})\mathfrak{Q} = d_i c_k(\mathfrak{V}^{(i)}\mathfrak{C}_{ik})\,{}^{(k)}\mathfrak{U}$ ist. Nun ist nach 9. $d_i c_k = 1$, ferner nach (7) $\mathfrak{V}^{(i)}\mathfrak{C}_{ik}\,{}^{(k)}\mathfrak{U} = \mathfrak{C}^*_{ik}$, was zu zeigen war.

## § 2. Eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes.

Wir haben uns bis jetzt mit den Isomorphismen eines maximalen Matrizenringes beschäftigt, die die Diagonalmatrizen $r\mathfrak{E}$ ungeändert lassen. Betrachten wir allgemeiner beliebige Isomorphismen zweier Matrizenringe, so gilt folgender

**Satz.** *Jeder beliebige Isomorphismus* $I$ *zweier maximalen Matrizenringe* $\mathsf{M}$ *und* $\mathsf{M}'$ *läßt sich erzeugen durch Hintereinanderausführen einer Transformation von* $\mathsf{M}$ *mit zwei festen Matrizen* $\mathfrak{P}$ *und* $\mathfrak{Q}$ *von der Eigenschaft* $\mathfrak{Q}\mathfrak{P} = \mathfrak{E}$ *und eines Isomorphismus* $K$ *des komplexen Zahlkörpers auf sich* [10]).

Die Anwendung von $K$ auf eine Matrix ist dabei so zu verstehen, daß jedes Element der Matrix durch das ihm bei $K$ entsprechende ersetzt wird.

Beweis: 1. Bei dem Isomorphismus $I$ von $\mathsf{M}$ auf $\mathsf{M}'$ entspricht jeder Matrix $\mathfrak{Z}$ aus $\mathsf{M}$, die mit allen Matrizen aus $\mathsf{M}$ vertauschbar ist, in $\mathsf{M}'$ eine mit allen Matrizen aus $\mathsf{M}'$ vertauschbare Matrix $\mathfrak{Z}'$, d. h. das Zentrum von $\mathsf{M}$ geht vermöge $I$ in das Zentrum von $\mathsf{M}'$ über. Nun haben wir schon in der Einleitung gesehen, daß das Zentrum eines maximalen Matrizenringes aus allen und nur den Matrizen $r\mathfrak{E}$ besteht. Das Zentrum von $\mathsf{M}$ wird also beim Isomorphismus $I$ in sich übergeführt; da das Zentrum durch die Zuordnung $r\mathfrak{E} \longleftrightarrow r$ dem Körper der komplexen Zahlen isomorph ist, wird so durch $I$ ein Isomorphismus $K$ des Körpers der komplexen Zahlen auf sich erzeugt.

2. Der weitere Beweis des Satzes ist nun eine einfache Modifikation des Beweises des Hauptsatzes, wir werden uns also darauf beschränken, die Hauptpunkte anzugeben.

---

[10]) Für diesen Satz gilt gleichfalls das in Anm. 8 Gesagte.

Im Beweis des Hauptsatzes ist beim Nachweis der Existenz der beiden Matrizen $\widehat{\mathfrak{P}}$ und $\widehat{\mathfrak{Q}}$ (sie heißen dort $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$) von der Eigenschaft $\widehat{\mathfrak{Q}}\mathfrak{C}_{ik}\widehat{\mathfrak{P}} = \mathfrak{C}'_{ik}$, $\widehat{\mathfrak{P}}\widehat{\mathfrak{Q}} = \mathfrak{E}$ die Voraussetzung, daß $(r\,\mathfrak{E})' = r\,\mathfrak{E}$ ist, noch nicht benutzt worden. Daher bleibt dieser Teil des Beweises, also 1. bis 6., auch für unseren Satz gültig. Nun sind zwar $\widehat{\mathfrak{P}}$ und $\widehat{\mathfrak{Q}}$ zwei Transformatoren, die den Isomorphismus $I$ für die $\mathfrak{C}_{ik}$ vermitteln, aber sie sind nicht von der in unserem Satz behaupteten Art, da sie den Isomorphismus allein, ohne nachherige Anwendung von $K$ vermitteln (es sei denn, daß die Koeffizienten von $\mathfrak{C}'_{ik}$ durch $K$ alle in sich übergeführt werden, was im allgemeinen sicher nicht zutrifft). Wir helfen uns nun so, daß wir auf die Matrizen $\widehat{\mathfrak{P}}$ und $\widehat{\mathfrak{Q}}$ den zu $K$ inversen Isomorphismus $K^{-1}$ anwenden. Mit diesen neuen Transformatoren $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ bilden wir jetzt die Matrix $\mathfrak{Q}\mathfrak{C}_{ik}\mathfrak{P} = \overline{\mathfrak{C}}_{ik}$. Üben wir dann auf $\overline{\mathfrak{C}}_{ik}$ den Isomorphismus $K$ aus, so erhalten wir $\mathfrak{C}'_{ik}$, d. h. die Matrizen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ sind für die $\mathfrak{C}_{ik}$ die richtigen Transformatoren [11]).

3. Hilfssatz 2 lautet jetzt so: *Die Matrizen* $\mathfrak{C}_{\alpha\alpha}\mathfrak{Q}$ *und* $\mathfrak{P}\mathfrak{C}_{\alpha\alpha}$ *sind Matrizen aus* M.

Er wird analog bewiesen wie in § 1: Wir bilden $\mathfrak{C}_{\alpha\alpha}\widehat{\mathfrak{Q}}$ und schließen wie in § 1 weiter. Wenn wir dann in $\mathfrak{C}^*_{\alpha\alpha}\mathfrak{C}_{i1} = \mathfrak{V}^{(\alpha)}u_{\alpha i}\mathfrak{C}_{\alpha 1}$ den Isomorphismus $I^{-1}$ rückgängig machen, geht aber $u_{\alpha i}$ in $u^{(K)}_{\alpha i}$ über. Es wird daher $\mathfrak{C}_{\alpha\alpha}\widehat{\mathfrak{Q}} = c_\alpha\mathfrak{U}^{(K)}$. Daraus folgt $\mathfrak{C}_{\alpha\alpha}\mathfrak{Q} = \tilde{c}^{(\alpha)}_\alpha\mathfrak{U}$ mit $\tilde{c}_\alpha = c^{(K^{-1})}_\alpha$. Analog wird $\mathfrak{P}\mathfrak{C}_{\alpha\alpha} = \mathfrak{V}^{(\alpha)}\tilde{d}_\alpha$. Also liegen $\mathfrak{C}_{\alpha\alpha}\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{P}\mathfrak{C}_{\alpha\alpha}$ in M, und $\overline{\mathfrak{C}} = \mathfrak{Q}\mathfrak{C}\,\mathfrak{P}$ kann gebildet werden.

4. Jetzt ist nur noch zu zeigen, daß $\mathfrak{C}'$ aus $\overline{\mathfrak{C}}$ durch Transformation mittels $K$ hervorgeht. Denn $\mathfrak{Q}\mathfrak{P} = \mathfrak{E}$ folgt genau wie in § 1.

Ist wieder $c'_{ik}$ das $(i,k)$-te Element der der Matrix $\mathfrak{C}$ aus M in M′ zugeordneten Matrix $\mathfrak{C}'$, so ist $c'_{ik}\mathfrak{C}_{ik} = \mathfrak{C}_{ii}\mathfrak{C}'\mathfrak{C}_{kk}$. Üben wir darauf $I^{-1}$ aus, so wird $c'^{(K^{-1})}_{ik}\mathfrak{C}^*_{ik} = \mathfrak{C}^*_{ii}\mathfrak{C}\mathfrak{C}^*_{kk}$ $= \mathfrak{V}^{(i)(i)}\mathfrak{U}\mathfrak{C}\,\mathfrak{V}^{(k)(k)}\mathfrak{U}$. Wie in § 1 folgt daraus $c'^{(K^{-1})}_{ik}\mathfrak{C}^*_{ik} = x_{ik}\mathfrak{C}^*_{ik}$. Somit gilt $c'^{(K^{-1})}_{ik} = x'_{ik}$ und $c'_{ik} = x^{(K)}_{ik}$. Man erhält also das Element $c'_{ik}$ von $\mathfrak{C}'$, indem man das Produkt ${}^{(i)}\mathfrak{U}\mathfrak{C}\,\mathfrak{V}^{(k)}$ bildet und dann auf das einzige nicht verschwindende Element den Isomorphismus $K$ ausübt. Nun ist aber nach 3. $\mathfrak{C}_{ii}\mathfrak{Q} = \tilde{c}_i\,{}^{(i)}\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{P}\mathfrak{C}_{kk} = \tilde{d}_k\,\mathfrak{V}^{(k)}$; daher wird

$$ {}^{(i)}\mathfrak{U}\mathfrak{C}\,\mathfrak{V}^{(k)} = \frac{1}{\tilde{c}_i\tilde{d}_k}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ q_{i1} & q_{i2} & q_{i3} & q_{i4} & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}\mathfrak{C}\begin{pmatrix} 0 & \cdot & 0 & p_{1k} & 0 & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & p_{2k} & 0 & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & p_{3k} & 0 & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & p_{4k} & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}. $$

Wie in § 1, 9. folgt $\tilde{c}_i\tilde{d}_k = 1$. Daher ist $\mathfrak{C}'$ nichts anderes als die mit $K$ transformierte Matrix $\overline{\mathfrak{C}}$, wie behauptet war.

## § 3. Isomorphismen vollkommener Matrizenringe.

In K.-T. werden „vollkommene" Matrizenringe betrachtet, das sind Ringe, die aus der Gesamtheit $\Sigma(\lambda)$ derjenigen Matrizen bestehen, die einen vollkommenen Raum $\lambda$ in sich überführen. Jeder vollkommene Matrizenring ist maximal. In K.-T. § 8 wird der Begriff der Homöomorphie zweier vollkommenen Räume erklärt und der Satz bewiesen:

Sind zwei vollkommene Räume $\lambda$ und $\mu$ homöomorph, so sind die Matrizenringe $\Sigma(\lambda)$ und $\Sigma(\mu)$ über ihrem Zentrum isomorph.

---

[11]) Im allgemeinen kann man nicht schließen, daß mit $\widehat{\mathfrak{P}}\widehat{\mathfrak{Q}} = \mathfrak{E}$ auch $\mathfrak{P}\mathfrak{Q} = \mathfrak{E}$ ist, wohl aber dann, wenn bei der Produktbildung nur endliche Summen auftreten.

Von diesem Satz wollen wir jetzt die Umkehrung beweisen, wir behaupten also

**Satz 1:** *Zwei vollkommene Matrizenringe $\Sigma(\lambda)$ und $\Sigma(\mu)$ sind dann und nur dann über ihrem Zentrum isomorph, wenn ihre Spaltenräume $\lambda$ und $\mu$ homöomorph sind.*

Zum Beweise brauchen wir den

**Hilfssatz:** *Sind die maximalen Matrizenringe $\Lambda$ und $\mathsf{M}$ über ihrem Zentrum isomorph, so bildet die Matrix $\mathfrak{Q}$, die eine der nach dem Hauptsatz von § 1 den Isomorphismus $\Lambda \longleftrightarrow \mathsf{M}$ vermittelnden Matrizen, den Spaltenraum $\lambda$ von $\Lambda$ in einen Teilraum des Spaltenraumes $\mu$ von $\mathsf{M}$ ab.*

Nach dem Hauptsatz liegen alle Matrizen $\mathfrak{Q}\mathfrak{A}\mathfrak{P}$, $\mathfrak{A}$ eine beliebige Matrix aus $\Lambda$, in $\mathsf{M}$. Es sei $\mathfrak{x}$ eine beliebige Stelle aus $\lambda$, dann ist $\mathfrak{Q}\mathfrak{x}$ Spalte einer Matrix $\mathfrak{Q}\mathfrak{A}\mathfrak{P}$: Man setze die erste Spalte von $\mathfrak{A}$ gleich $\frac{1}{p_{1k}}\mathfrak{x}$, die übrigen gleich Null. Da alle endlichen Matrizen in $\Lambda$ liegen, liegt auch diese Matrix $\mathfrak{A}$ in $\Lambda$. $\mathfrak{Q}\mathfrak{x}$ ist dann die $k$-te Spalte von $\mathfrak{Q}\mathfrak{A}\mathfrak{P}$. Als Spalte einer Matrix aus $\mathsf{M}$ ist aber $\mathfrak{Q}\mathfrak{x}$ eine Stelle aus $\mu$, also führt $\mathfrak{Q}$ den Raum $\lambda$ in einen Teilraum von $\mu$ über.

*Beweis von Satz* 1. In K.-T. § 8 wird der Satz bewiesen (Satz 2), daß eine durch eine Matrix vermittelte lineare Abbildung eines vollkommenen Raumes $\lambda$ in einen Teilraum eines vollkommenen Raumes $\mu$ stetig ist. Die Matrix $\mathfrak{Q}$ vermittelt also eine stetige lineare Abbildung von $\lambda$ in $\mu$. Diese Abbildung ist eineindeutig, denn wenn sie es nicht wäre, so gäbe es eine Stelle $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{o}$ in $\lambda$, der die Null in $\mu$ zugeordnet wäre. Bilden wir mit diesem $\mathfrak{x}$ eine Matrix $\mathfrak{A}$, die als erste und einzige von Null verschiedene Spalte $\mathfrak{x}$ enthält, so wäre $\mathfrak{Q}\mathfrak{A}\mathfrak{P} = \mathfrak{O}$, die $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{O}$ entsprechende Matrix wäre die Nullmatrix, was dem Isomorphismus widerspricht. Die inverse Abbildung von $\mu$ auf $\lambda$ wird nach § 1 Korollar 2 durch $\mathfrak{P}$ vermittelt; diese Abbildung ist ebenfalls stetig, also sind $\lambda$ und $\mu$ homöomorph.

Nennen wir einen Automorphismus eines vollkommenen Matrizenringes $\Sigma(\lambda)$ einen *inneren*, wenn die vermittelnden Matrizen $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{P}$ beide in $\Sigma(\lambda)$ liegen, so können wir aussprechen den

**Satz 2:** *Jeder Automorphismus eines vollkommenen Matrizenringes über dem Zentrum ist ein innerer.*

Zum Beweise brauchen wir nur zu überlegen, daß $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ nach dem obigen Hilfssatz $\lambda$ in sich überführen; dann liegen sie aber in $\Sigma(\lambda)$, da $\Sigma(\lambda)$ alle Matrizen enthält, die $\lambda$ in sich abbilden.

**Satz 3:** *Es seien $\mathsf{M}_1$ und $\mathsf{M}_2$ zwei vollkommene Matrizenringe, die isomorph zum vollkommenen Matrizenring $\Lambda$ sind. $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{P}_1$ bzw. $\mathfrak{Q}_2$, $\mathfrak{P}_2$ seien die Matrizen, die die Isomorphismen von $\Lambda$ zu $\mathsf{M}_1$ bzw. $\mathsf{M}_2$ bewirken. $\mathsf{M}_1$ und $\mathsf{M}_2$ sind nur dann identisch, wenn die Produkte $\mathfrak{P}_2\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}_2$ gebildet werden können und in $\Lambda$ liegen.*

$\mathsf{M}_1$ und $\mathsf{M}_2$ seien identisch. Dann sind auch die zugehörigen vollkommenen Räume $\mu_1$ und $\mu_2$ identisch. $\mathfrak{Q}_1$ vermittelt eine Homöomorphie von $\lambda$ auf $\mu_1$, $\mathfrak{P}_2$ eine von $\mu_2 = \mu_1$ auf $\lambda$. Die aus beiden zusammengesetzte Homöomorphie von $\lambda$ auf sich wird nach K.-T. § 8 durch das Produkt $\mathfrak{P}_2\mathfrak{Q}_1$ vermittelt, das also existiert. Jede Homöomorphie von $\lambda$ auf sich wird aber durch eine Matrix aus $\Lambda$ dargestellt. Also liegt $\mathfrak{P}_2\mathfrak{Q}_1$ in $\Lambda$. Analog beweist man dies für $\mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}_2$.

Ob die Umkehrung dieses Satzes auch gilt, ist noch ungeklärt.

## § 4. Die zum Ring aller zeilenfiniten Matrizen isomorphen maximalen Matrizenringe.

Ist $\lambda$ ein konvergenzfreier [12]) vollkommener Raum und $\Sigma(\lambda) = \Lambda$ der dazugehörige konvergenzfreie vollkommene Matrizenring, so gilt der

[12]) Vgl. K.-T. § 15.

**Satz:** *Jeder Isomorphismus $I$ des maximalen konvergenzfreien Matrizenringes $\Lambda$ auf einen beliebigen maximalen Matrizenring $\mathsf{M}$ entsteht durch Hintereinanderausführen eines Isomorphismus $K$ der komplexen Zahlen auf sich und eines Isomorphismus von $\Lambda$ auf $\mathsf{M}$, bei dem die Matrizen $r\mathfrak{E}$ einzeln in sich übergehen.*

Zum Beweise brauche ich nur zu zeigen, daß jeder Isomorphismus $K$ des Körpers der komplexen Zahlen auf sich den Ring $\Lambda$ isomorph auf sich abbildet: Denn durch den gegebenen Isomorphismus $I$ von $\Lambda$ auf $\mathsf{M}$ geht jede Matrix $r\mathfrak{E}$ in eine Matrix $r'\mathfrak{E}$ über. Bezeichnen wir den Isomorphismus $r \longleftrightarrow r'$ des Körpers der komplexen Zahlen mit $K$, so geht $\Lambda$ nach Annahme durch $K$ in sich über, $I$ wird dann das Produkt der Isomorphismen $K$ und $K^{-1}I$, wobei der zweite ein Isomorphismus von $\Lambda$ auf $\mathsf{M}$ ist, der die Matrizen $r\mathfrak{E}$ in sich überführt.

Dafür, daß eine Matrix $\mathfrak{A}$ einen konvergenzfreien Raum $\lambda$ in sich überführt, ist nach K.-T. § 15 Satz 5b notwendig und hinreichend, daß gewisse Teile der Matrix $\mathfrak{A}$ nur endlich viele Nichtnullen aufweisen. Diese Bedingung ist aber nach Ausübung von $K$ ebenso erfüllt wie vorher, also gehört auch die neue Matrix zu $\Lambda$, jeder Isomorphismus $K$ der komplexen Zahlen führt daher $\Lambda$ in sich über.

Nach diesem Satz können wir uns also beim Aufsuchen sämtlicher zum Ring $\Omega$ der zeilenfiniten Matrizen isomorphen Ringe auf die beschränken, die durch Isomorphismen über dem Zentrum entstehen.

**Satz:** *Es gibt keinen zum Ring $\Omega$ isomorphen und von ihm verschiedenen maximalen Matrizenring.*

Zum Beweise genügt es jetzt zu zeigen, daß die beiden Matrizen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$, die nach dem Hauptsatz den Isomorphismus von $\Omega$ auf $\mathsf{M}$ vermitteln, zeilenfinit sind, denn dann ist ja jede Matrix $\mathfrak{Q}\mathfrak{A}\mathfrak{P}$, $\mathfrak{A}$ aus $\Omega$, ebenfalls zeilenfinit, also $\mathsf{M} \leqq \Omega$ und damit, wegen der Maximalität von $\mathsf{M}$, $\mathsf{M} = \Omega$.

Die Matrix $\mathfrak{Q}$ ist nach § 1 Hilfssatz 2 zeilenfinit. Um zu zeigen, daß auch $\mathfrak{P}$ zeilenfinit ist, verfahren wir so: Wir weisen nach, daß sich zu jedem nicht zeilenfiniten $\mathfrak{P}$ zwei zeilenfinite Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ angeben lassen, so daß das Produkt $(\mathfrak{Q}\mathfrak{A}\mathfrak{P})\,(\mathfrak{Q}\mathfrak{B}\mathfrak{P})$ nicht existiert, was ein Widerspruch ist, da die beiden Matrizen $\mathsf{M}$ angehören. Zum Beweis brauchen wir den

**Hilfssatz:** *Besitzt eine zeilenfinite Matrix $\mathfrak{Q}$ eine eindeutige vordere und hintere Reziproke $\mathfrak{P}$, so kann sie nicht unendlich viele Zeilen einer festen Länge $l$ enthalten, d. h. Zeilen, die rechts von der $l$-ten Spalte nur Nullen aufweisen.*

*Beweis*: Hätte die Matrix $\mathfrak{Q}$ unendlichviele Zeilen von der Länge $l$, so wären bereits $l+1$ solcher Zeilen linear abhängig, also sicherlich eine von ihnen, etwa $\mathfrak{z}_i$, die $i$-te Zeile von $\mathfrak{Q}$, linear aus den übrigen $l$, den Zeilen $\mathfrak{z}_{\nu_1}, \mathfrak{z}_{\nu_2}, \ldots, \mathfrak{z}_{\nu_l}$ von $\mathfrak{Q}$, komponierbar, d. h. es gäbe $l$ Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_l$, die nicht sämtlich gleich Null sind und die Gleichung befriedigen

$$\mathfrak{z}_i = c_1\mathfrak{z}_{\nu_1} + c_2\mathfrak{z}_{\nu_2} + \cdots + c_l\mathfrak{z}_{\nu_l}.$$

Bilden wir jetzt das Element an der Stelle $(i, i)$ von $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}$, multiplizieren wir also $\mathfrak{z}_i$ mit $\mathfrak{s}_i$, der $i$-ten Spalte von $\mathfrak{P}$, so wird wegen $\mathfrak{Q}\mathfrak{P} = \mathfrak{E}$, also $\mathfrak{z}_l\mathfrak{s}_i = 0$ für $i \neq l$, das skalare Produkt $\mathfrak{z}_i\mathfrak{s}_i = c_1\,\mathfrak{z}_{\nu_1}\mathfrak{s}_i + c_2\,\mathfrak{z}_{\nu_2}\mathfrak{s}_i + \cdots c_l\mathfrak{z}_{\nu l}\mathfrak{s}_i = 0$, müßte aber andererseits wieder wegen $\mathfrak{Q}\mathfrak{P} = \mathfrak{E}$ gleich 1 sein, was sich widerspricht. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Es sei nun die $n$-te Zeile von $\mathfrak{P}$ nicht finit und $q_{nm}$ ein von Null verschiedenes Element der $n$-ten Zeile von $\mathfrak{Q}$, das es wegen $\mathfrak{Q}\mathfrak{P} = \mathfrak{E}$ geben muß. Wählt man $\mathfrak{A} = \frac{1}{q_{nm}}\mathfrak{C}_{mn}$, so ist die $n$-te Zeile von $\mathfrak{Q}\mathfrak{A}\mathfrak{P} = \mathfrak{Q}\mathfrak{C}_{mn}\frac{1}{q_{nm}}\mathfrak{P}$ gleich der $n$-ten Zeile von $\mathfrak{P}$.

Sind $p_{n\alpha_1}, p_{n\alpha_2}, \ldots$ die von Null verschiedenen Elemente der $n$-ten Zeile von $\mathfrak{P}$, so werden wir die Matrix $\mathfrak{B}$ so einrichten, daß eine Spalte von $\mathfrak{Q}\mathfrak{B}\mathfrak{P}$, etwa die $\varkappa$-te, an den Stellen $(\beta_1, \varkappa), (\beta_2, \varkappa), \ldots$ die Elemente $\frac{1}{p_{n\beta_1}}, \frac{1}{p_{n\beta_2}}, \ldots$ aufweist, wobei die Folge $\beta_1, \beta_2, \ldots$ eine noch näher zu bestimmende Teilfolge der Folge $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ ist. Diese Teilfolge wählen wir so aus, daß die Länge $l_{\beta_{\varrho+1}}$ der $\beta_{\varrho+1}$-ten Zeile von $\mathfrak{Q}$ stets größer ist als $l_{\beta_\varrho}$, die Länge der $\beta_\varrho$-ten Zeile von $\mathfrak{Q}$. Das ist möglich nach dem Hilfssatz.

Wir bilden jetzt die Matrix $\mathfrak{B} = (b_{ik})$, $b_{ik} = 0$ für $k > 1$, $b_{i1} \neq 0$ nur für $i = l_{\beta_\varrho}$, $\varrho = 1, 2, \ldots$. Die Größen $b_{l_{\beta_\varrho} 1}$ bestimmen wir sukzessive aus den Gleichungen

$$\left(\sum_{\sigma=1}^{\varrho-1} q_{\beta_\varrho l_{\beta_\sigma}} b_{l_{\beta_\sigma} 1} + q_{\beta_\varrho l_{\beta_\varrho}} b_{l_{\beta_\varrho} 1}\right) p_{1\varkappa} = \frac{1}{p_{n\beta_\varrho}},$$

auf deren linker Seite gerade das $(\beta_\varrho, \varkappa)$-te Element von $\mathfrak{Q}\mathfrak{B}\mathfrak{P}$ steht. Dabei ist $\varkappa$ so gewählt, daß $p_{1\varkappa} \neq 0$. Es ist

$$b_{l_{\beta_1} 1} = \frac{1}{p_{n\beta_1} p_{1\varkappa} q_{\beta_1 l_{\beta_1}}}$$

$$b_{l_{\beta_2} 1} = \left(\frac{1}{p_{n\beta_2}} - \frac{q_{\beta_2 l_{\beta_1}}}{p_{n\beta_1} q_{\beta_1 l_{\beta_1}}}\right) \frac{1}{p_{1\varkappa} q_{\beta_2 l_{\beta_2}}}.$$

. . . . . .

Bildet man jetzt das Produkt $(\mathfrak{Q}\mathfrak{A}\mathfrak{P})(\mathfrak{Q}\mathfrak{B}\mathfrak{P})$, so existiert das Element an der Stelle $(n, \varkappa)$ nicht. Denn bei der Produktbildung treten in dieser Summe unendlich viele Summanden $p_{n\beta_\varrho} \frac{1}{p_{n\beta_\varrho}} = 1$ auf, die Summe divergiert daher. Die Matrix $\mathfrak{P}$ muß also zeilenfinit sein.

Das analoge Resultat gilt natürlich für das System aller spaltenfiniten Matrizen.

## § 5. Die zum Ring aller halbfiniten Matrizen isomorphen maximalen Matrizenringe.

Für die Definition und die wichtigsten Eigenschaften der halbfiniten Matrizen verweisen wir auf G. Köthe und O. Toeplitz, Theorie der halbfiniten unendlichen Matrizen, Journal f. Math. Bd. 165.

Da der Ring $\Psi$ aller halbfiniten Matrizen konvergenzfrei und maximal ist, folgt aus dem ersten Satz in § 4: Jedes dem System $\Psi$ der halbfiniten Matrizen isomorphe System $\Psi'$ geht aus diesem durch Transformation mit zwei festen Matrizen $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ von den Eigenschaften $\alpha$) bis $\varepsilon$) hervor.

Im Gegensatz zum Ring der zeilenfiniten Matrizen gibt es zum System $\Psi$ isomorphe Systeme, die von ihm verschieden sind. So liefert z. B. die Transformation mit den Matrizen

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{Q} = \left(\begin{array}{ccc|cc|c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot \\ \hline \cdot & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right)$$

ein zu $\Psi$ isomorphes und von ihm verschiedenes System: Multipliziert man irgendeine halbfinite Matrix $\mathfrak{A}$ vorn mit $\mathfrak{P}$, so werden dadurch die Zeilen $\mathfrak{z}_\alpha$ und $\mathfrak{z}_{-(\alpha+1)}$ ver-

tauscht. Multipliziert man $\mathfrak{A}$ hinten mit $\mathfrak{P}$, so werden in $\mathfrak{A}$ die Spalten $\mathfrak{s}_\alpha$ und $\mathfrak{s}_{-(\alpha+1)}$ vertauscht. Durch die Transformation $\mathfrak{A}' = \mathfrak{P}\mathfrak{A}\mathfrak{P}$ werden sowohl die Zeilen $\mathfrak{z}_{\delta_\alpha}$ mit den Zeilen $\mathfrak{z}_{\delta_{-(\alpha+1)}}$, als auch die Spalten $\mathfrak{s}_\alpha$ mit den Spalten $\mathfrak{s}_{-(\alpha+1)}$ vertauscht. Es ist also

$$\mathfrak{P}\mathfrak{A}\mathfrak{P} = \mathfrak{P}\left(\begin{array}{ccc|cc|c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{-2-2} & a_{-2-1} & a_{-20} & a_{-21} & \cdot \\ \cdot & a_{-1-2} & a_{-1-1} & a_{-10} & a_{-11} & \cdot \\ \hline \cdot & a_{0-2} & a_{0-1} & a_{00} & a_{01} & \cdot \\ \cdot & a_{1-2} & a_{1-1} & a_{10} & a_{11} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right)\mathfrak{P} = \left(\begin{array}{ccc|cc|c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{11} & a_{10} & a_{1-1} & a_{1-2} & \cdot \\ \cdot & a_{01} & a_{00} & a_{0-1} & a_{0-2} & \cdot \\ \hline \cdot & a_{-11} & a_{-10} & a_{-1-1} & a_{-1-2} & \cdot \\ \cdot & a_{-21} & a_{-20} & a_{-2-1} & a_{-2-2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right).$$

Der rechte obere Teil von $\mathfrak{A}'$ ist eine beliebige Matrix, während er bei einer halbfiniten Matrix finit sein muß, also haben wir damit einen zu $\Psi$ isomorphen, von ihm verschiedenen Ring erhalten, dessen Maximalität wie beim Ring der halbfiniten Matrizen einzusehen ist (vgl. die oben zitierte Arbeit).

Aber dies ist nicht etwa der einzige zu $\Psi$ isomorphe und von ihm verschiedene Ring. Die Matrix $\mathfrak{P}$ gehört einer besonderen Klasse von Matrizen an:

Ist $\ldots\ \nu_{-2}, \nu_{-1}, \nu_0, \nu_1, \nu_2, \ldots$ irgendeine Permutation der Folge $\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$, so bilden wir die Matrix $\mathfrak{P}$, die an den Stellen $\ldots(\nu_{-2}, -2), (\nu_{-1}, -1), (\nu_0, 0), (\nu_1, 1), (\nu_2, 2)\ldots$ eine Eins und sonst überall Nullen besitzt. Multipliziert man dann eine halbfinite Matrix $\mathfrak{A}$ hinten mit $\mathfrak{P}$, so rückt die $\nu_i$-te Spalte in die $i$-te Spalte. Multipliziert man $\mathfrak{A}$ vorn mit der Transponierten $\tilde{\mathfrak{P}}$ von $\mathfrak{P}$, so rückt die $\nu_i$-te Zeile in die $i$-te Zeile. Die Matrix $\mathfrak{A}' = \tilde{\mathfrak{P}}\mathfrak{A}\mathfrak{P}$ weist also in der $i$-ten Zeile die $\nu_i$-te Zeile, in der $i$-ten Spalte die $\nu_i$-te Spalte von $\mathfrak{A}$ auf. Eine solche Matrix $\mathfrak{P}$ wollen wir als *Permutationsmatrix* bezeichnen. Es ist $\mathfrak{P}\tilde{\mathfrak{P}} = \tilde{\mathfrak{P}}\mathfrak{P} = \mathfrak{E}$. Wir behaupten nun den

**Satz:** *Durch die Transformation $\tilde{\mathfrak{P}}\mathfrak{A}\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}$ eine beliebige Permutationsmatrix, entsteht ein zum Ring $\Psi$ der halbfiniten Matrizen isomorpher maximaler Matrizenring $\Psi'$. Dann und nur dann sind zwei so entstehende Matrizenringe $\Psi_1'$ und $\Psi_2'$ identisch, wenn $\mathfrak{P}_1\tilde{\mathfrak{P}}_2$ und $\mathfrak{P}_2\tilde{\mathfrak{P}}_1$ halbfinit sind.*

Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei beliebige Matrizen aus $\Psi$, so müssen wir zeigen, daß

1. $\tilde{\mathfrak{P}}\mathfrak{A}\mathfrak{P} + \tilde{\mathfrak{P}}\mathfrak{B}\mathfrak{P} = \tilde{\mathfrak{P}}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})\,\mathfrak{P}$
2. $(\tilde{\mathfrak{P}}\mathfrak{A}\mathfrak{P})(\tilde{\mathfrak{P}}\mathfrak{B}\mathfrak{P}) = \tilde{\mathfrak{P}}(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\,\mathfrak{P}$

ist. Daß 1. richtig ist, sieht man sofort. Daß 2. richtig ist, beweist man so: Das Element $c_{\nu_\alpha\nu_\beta} = \sum_i a_{\nu_\alpha i}\, b_{i\nu_\beta}$ von $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ kommt in $\mathfrak{C}' = \tilde{\mathfrak{P}}\mathfrak{C}\mathfrak{P}$ an der Stelle $(\alpha, \beta)$ vor; wir werden nachweisen, daß die Matrix $(\tilde{\mathfrak{P}}\mathfrak{A}\mathfrak{P})(\tilde{\mathfrak{P}}\mathfrak{B}\mathfrak{P}) = \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ an der Stelle $(\alpha, \beta)$ ebenfalls das Element $c_{\nu_\alpha\nu_\beta}$ besitzt. Wir bilden das Element an der Stelle $(\alpha, \beta)$ von $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$, indem wir die $\alpha$-te Zeile von $\mathfrak{A}'$ mit der $\beta$-ten Spalte von $\mathfrak{B}'$ komponieren. Nun steht in der $\alpha$-ten Zeile von $\mathfrak{A}'$ bis auf eine Permutation der Elemente die $\nu_\alpha$-te Zeile von $\mathfrak{A}$, in der $\beta$-ten Spalte von $\mathfrak{B}'$ bis auf *dieselbe* Permutation die $\nu_\beta$-te Spalte von $\mathfrak{B}$. Da nun bei der Produktbildung nur endliche Summen auftreten, die ja beliebig umgeordnet werden dürfen, so wird das Element von $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ an der Stelle $(\alpha, \beta)$ gleich $\sum_i a_{\nu_\alpha i} b_{i\nu_\beta} = c_{\nu_\alpha\nu_\beta}$. Daß $\Psi'$ maximal ist, beweist man wieder analog wie im halbfiniten Fall (man kann dies auch unmittelbar daraus ablesen, daß $\tilde{\mathfrak{P}}\mathfrak{A}\mathfrak{P}$ die Gesamtheit aller Matrizen durchläuft, die den Raum $\tilde{\mathfrak{P}}\,\psi$ in sich überführen, $\psi$ der konvergenzfreie Spaltenraum des halbfiniten Matrizenringes, der vollkommen ist; die Gesamtheit der Matrizen, die den vollkommenen Raum

$\mathfrak{P}\psi$ in sich überführen, bilden ja nach dem Transformationstheorem von K.-T. einen maximalen Ring). Damit ist der erste Teil der Behauptung bewiesen. $\Psi_1'$ und $\Psi_2'$ sind vollkommene Matrizenringe, also nach Satz 3 in § 3 nur dann identisch, wenn $\mathfrak{P}_1\widetilde{\mathfrak{P}}_2$ und $\mathfrak{P}_2\widetilde{\mathfrak{P}}_1$ halbfinit sind. Sind andererseits diese Matrizen halbfinit, so ist, wie man sofort nachrechnet, $\mathfrak{P}_2 = (\mathfrak{P}_2\widetilde{\mathfrak{P}}_1)\mathfrak{P}_1$ und $\widetilde{\mathfrak{P}}_2\mathfrak{A}\mathfrak{P}_2 = \widetilde{\mathfrak{P}}_1[(\mathfrak{P}_1\widetilde{\mathfrak{P}}_2)\mathfrak{A}(\mathfrak{P}_2\widetilde{\mathfrak{P}}_1)]\mathfrak{P}_1$ für jede halbfinite Matrix $\mathfrak{A}$. Wir bekommen also $\Psi_2'$, indem wir $\Psi$ zuerst mit $\mathfrak{P}_2\widetilde{\mathfrak{P}}_1$ transformieren, dann mit $\mathfrak{P}_1$. Bei der ersten Transformation geht $\Psi$ in sich über, da $\mathfrak{P}_2\widetilde{\mathfrak{P}}_1$ und $\mathfrak{P}_1\widetilde{\mathfrak{P}}_2$ halbfinit sind, bei der zweiten in $\Psi_1'$. Also ist $\Psi_1' = \Psi_2'$.

Wir behaupten nun umgekehrt den

**Satz:** *Jeder zum Ring $\Psi$ aller halbfiniten Matrizen isomorphe maximale Matrizenring entsteht aus $\Psi$ durch Transformation mit einer geeigneten Permutationsmatrix.*

Wir schicken dem Beweis folgende Überlegung voran: Ist $\mathfrak{R}$ eine Permutationsmatrix, so wird durch $\mathfrak{R}, \widetilde{\mathfrak{R}}$ ein zu $\Psi$ isomorpher Ring $\Psi'$ erzeugt. Denselben Ring bekommt man auch, wenn man $\Psi$ zuerst mit zwei halbfiniten Matrizen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{Q}_1$ von der Eigenschaft $\mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{Q}_1\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{E}$ und dann mit $\mathfrak{R}, \widetilde{\mathfrak{R}}$ transformiert. Da nun bei der Bildung von $\widetilde{\mathfrak{R}}(\mathfrak{Q}_1\mathfrak{A}\mathfrak{P}_1)\mathfrak{R}$ nur endliche Summen auftreten, so ist

$$\widetilde{\mathfrak{R}}(\mathfrak{Q}_1\mathfrak{A}\mathfrak{P}_1)\mathfrak{R} = (\widetilde{\mathfrak{R}}\mathfrak{Q}_1)\,\mathfrak{A}\,(\mathfrak{P}_1\mathfrak{R}).$$

$\Psi'$ kann also aus $\Psi$ auch durch Transformation mit den Matrizen $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{Q} = \widetilde{\mathfrak{R}}\mathfrak{Q}_1$ erzeugt werden. Wir werden unsern Satz also bewiesen haben, wenn wir zeigen können, daß die Transformatoren $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ aus dem Hauptsatz sich in der Form darstellen lassen $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1\mathfrak{R}$, $\mathfrak{Q} = \widetilde{\mathfrak{R}}\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{Q}_1$ halbfinit. Wir sehen uns jetzt die Matrizen $\mathfrak{P}_1\mathfrak{R}$ und $\widetilde{\mathfrak{R}}\mathfrak{Q}_1$ genauer an. Die Matrizen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{Q}_1$ sind halbfinit, haben also die Form

$$\mathfrak{P}_1 = \left(\begin{array}{c|c} {}^*\mathfrak{P}_1 & \mathfrak{P}_1^* \\ \hline {}_*\mathfrak{P}_1 & \mathfrak{P}_{1*} \end{array}\right), \qquad \mathfrak{Q}_1 = \left(\begin{array}{c|c} {}^*\mathfrak{Q}_1 & \mathfrak{Q}_1^* \\ \hline {}_*\mathfrak{Q}_1 & \mathfrak{Q}_{1*} \end{array}\right),$$

${}^*\mathfrak{P}_1$, ${}^*\mathfrak{Q}_1$ spaltenfinit, $\mathfrak{P}_1^*$, $\mathfrak{Q}_1^*$ endlich, $\mathfrak{P}_{1*}$, $\mathfrak{Q}_{1*}$ zeilenfinit, ${}_*\mathfrak{P}_1$, ${}_*\mathfrak{Q}_1$ beliebig. Wegen $\mathfrak{Q}_1\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{E}$ können in $\mathfrak{Q}_{1*}$ nur endlich viele Zeilen und in ${}^*\mathfrak{P}_1$ nur endlich viele Spalten ganz mit Nullen besetzt sein. Nun sind fast alle Zeilen, d. h. alle mit einer endlichen Anzahl von Ausnahmen, von $\mathfrak{Q}_1^*$ und fast alle Spalten von $\mathfrak{P}_1^*$ mit Nullen besetzt, während fast alle Spalten von ${}^*\mathfrak{P}_1$ und fast alle Zeilen von $\mathfrak{Q}_{1*}$ von Null verschiedene Elemente enthalten.

Es gilt also: Enthält jede der Zeilen $\mathfrak{z}_{\nu_1}, \mathfrak{z}_{\nu_2}, \ldots$ von $\mathfrak{Q}_1$ in der rechten Hälfte von Null verschiedene Elemente, so sind die entsprechenden. Spalten $\mathfrak{s}_{\nu_1}, \mathfrak{s}_{\nu_2}, \ldots$ bis auf endlich viele in der oberen Hälfte von $\mathfrak{P}_1$ mit lauter Nullen besetzt und umgekehrt. Dasselbe gilt für die Zeilen von $\mathfrak{Q}_1$, die in der rechten Hälfte nur Nullen haben und die Spalten von $\mathfrak{P}_1$, die in der oberen Hälfte Nichtnullen besitzen. Diese Tatsache gilt unverändert für die Matrizen $\mathfrak{P}_1\mathfrak{R}$ und $\widetilde{\mathfrak{R}}\mathfrak{Q}_1$. Wir zeigen nun, daß die Transformatoren $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$, die es nach dem Hauptsatz gibt, ebenfalls diese Eigenschaften haben im

**Hilfssatz 1:** *Enthalten die Zeilen $\mathfrak{z}_{\nu_1}, \mathfrak{z}_{\nu_2}, \ldots$ von $\mathfrak{Q}$ in der rechten Hälfte von Null verschiedene Elemente, so sind die Spalten $\mathfrak{s}_{\nu_1}, \mathfrak{s}_{\nu_2}, \ldots$ von $\mathfrak{P}$ in der oberen Hälfte fast alle mit Nullen besetzt.*

Wir brauchen noch einen anderen Hilfssatz, dessen Notwendigkeit ebenfalls leicht an den Matrizen $\mathfrak{P}_1\mathfrak{R}$ und $\widetilde{\mathfrak{R}}\mathfrak{Q}_1$ eingesehen werden kann.

**Hilfssatz 2:** *Sind die Zeilen $\mathfrak{z}_{\varrho_1}, \mathfrak{z}_{\varrho_2}, \ldots$ von $\mathfrak{Q}$ in der rechten Hälfte mit lauter Nullen besetzt, so stehen in jeder Spalte $\mathfrak{s}_n$ von $\mathfrak{Q}$ nur an endlich vielen der Stellen $(\varrho_1, n), (\varrho_2, n), \ldots$ von Null verschiedene Elemente. Analog: Enthalten die Spalten $\mathfrak{s}_{\sigma_1}, \mathfrak{s}_{\sigma_2}, \ldots$ von $\mathfrak{P}$ in der*

*oberen Hälfte nur Nullen, so weist jede Zeile* $\mathfrak{z}_m$ *von* $\mathfrak{P}$ *nur an endlich vielen der Stellen* $(m, \sigma_1), (m, \sigma_2), \ldots$ *von Null verschiedene Elemente auf.*

Bevor wir diese beiden Hilfssätze beweisen, wollen wir noch zeigen, daß hieraus unmittelbar unser Satz folgt. Zunächst ergibt sich aus Hilfssatz 1, daß die Matrix $\mathfrak{P}$ unendlich viele Spalten enthält, die in der oberen Hälfte nur Nullen enthalten, und unendlich viele, die dort von Null verschiedene Elemente aufweisen. Denn enthielte $\mathfrak{P}$ nur endlich viele Spalten, die in der oberen Hälfte nur Nullen besitzen, so würden nach Hilfssatz 1 fast alle Zeilen von $\mathfrak{Q}$ in der rechten Hälfte nur Nullen aufweisen. Da die Zeilen von $\mathfrak{Q}$ außerdem nach § 1 Hilfssatz 2 abbrechen, müßte $\mathfrak{P}\mathfrak{Q} \neq \mathfrak{E}$ sein. Enthielte $\mathfrak{P}$ nur endlich viele Spalten, die in der oberen Hälfte von Null verschiedene Elemente besitzen, so wäre ebenfalls $\mathfrak{P}\mathfrak{Q} \neq \mathfrak{E}$. Es seien $\mathfrak{s}_{n_1}, \mathfrak{s}_{n_2}, \ldots$ die Spalten von $\mathfrak{P}$, die in der oberen Hälfte von Null verschiedene Elemente enthalten, $\mathfrak{s}_{m_1}, \mathfrak{s}_{m_2}, \ldots$ die übrigen. Wir bilden die Permutationsmatrix $\tilde{\mathfrak{R}}$, die an den Stellen $\ldots (n_2, -2), (n_1, -1), (m_2, 0) (m_2, 1), \ldots$ eine Eins und sonst Nullen besitzt. Bilden wir dann $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}\tilde{\mathfrak{R}}$, $\mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{R}\mathfrak{Q}$, so haben die Matrizen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{Q}_1$ nach Hilfssatz 1 und § 1 Hilfssatz 2 die Form

$$\mathfrak{P}_1 = \left(\begin{array}{c|c} \text{spaltenfinit} & 0 \\ \hline \text{beliebig} & \text{beliebig} \end{array}\right), \qquad \mathfrak{Q}_1 = \left(\begin{array}{c|c} \text{beliebig} & \text{endlich} \\ \hline \text{beliebig} & \text{zeilenfinit} \end{array}\right).$$

Aus dem Hilfssatz 2 folgt jetzt, daß sie sogar halbfinit sind. Endlich gelten noch wegen $\mathfrak{R}\tilde{\mathfrak{R}} = \tilde{\mathfrak{R}}\mathfrak{R} = \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{P}\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}\mathfrak{P} = \mathfrak{E}$ die Formeln

$$\mathfrak{Q}_1\mathfrak{P}_1 = (\mathfrak{R}\mathfrak{Q})\,(\mathfrak{P}\tilde{\mathfrak{R}}) = \mathfrak{R}\,(\mathfrak{Q}\mathfrak{P})\,\tilde{\mathfrak{R}} = \mathfrak{E}$$
$$\mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}_1 = (\mathfrak{P}\tilde{\mathfrak{R}})\,(\mathfrak{R}\mathfrak{Q}) = \mathfrak{P}\,(\tilde{\mathfrak{R}}\mathfrak{R})\,\mathfrak{Q} = \mathfrak{E},$$

und aus $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}\tilde{\mathfrak{R}}$, $\mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{R}\mathfrak{Q}$ folgt schließlich $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1\mathfrak{R}$, $\mathfrak{Q} = \tilde{\mathfrak{R}}\mathfrak{Q}_1$, was zu zeigen war.

*Beweis von Hilfssatz* 1: Wir führen ihn indirekt. Es gebe also in $\mathfrak{Q}$ unendlich viele in der rechten Hälfte nicht verschwindende Zeilen $\mathfrak{z}_{\alpha_1}, \mathfrak{z}_{\alpha_2}, \ldots$, so daß die entsprechenden Spalten von $\mathfrak{P}$ in der oberen Hälfte von Null verschiedene Elemente besitzen. Wir definieren: Eine Spalte hat die Länge $l$, wenn sie in der $l$-ten Zeile abbricht, also oberhalb der $l$-ten Zeile keine von Null verschiedenen Elemente besitzt. Eine Zeile hat die Länge $l$, wenn sie in der $l$-ten Spalte abbricht, also rechts von der $l$-ten Spalte nur Nullen aufweist. Nach § 1 Hilfssatz 2 brechen alle Spalten von $\mathfrak{P}$ und alle Zeilen von $\mathfrak{Q}$ ab.

Sind jetzt $l_{\alpha_1}, l_{\alpha_2}, \ldots$ die Längen von $\mathfrak{s}_{\alpha_1}, \mathfrak{s}_{\alpha_2}, \ldots$, entsprechend $l'_{\alpha_1}, l'_{\alpha_2}, \ldots$ die Längen von $\mathfrak{z}_{\alpha_1}, \mathfrak{z}_{\alpha_2}, \ldots$, so sind folgende drei Fälle zu unterscheiden:

1) Die Zahlenfolgen $l_{\alpha_1}, l_{\alpha_2}, \ldots$ und $l'_{\alpha_1}, l'_{\alpha_2}, \ldots$ sind beide nicht beschränkt.
2) Eine der beiden Folgen ist nicht beschränkt.
3) Beide Folgen sind beschränkt.

Wenn beide Folgen nicht beschränkt sind, werden wir zwei halbfinite Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ angeben, für die das Produkt $(\mathfrak{Q}\mathfrak{A}\mathfrak{P})\,(\mathfrak{Q}\mathfrak{B}\mathfrak{P})$ nicht existiert. Ist eine der beiden Folgen nicht beschränkt, die andere beschränkt, so werden wir nachweisen, daß eines der Produkte $(\mathfrak{Q}\mathfrak{A}\mathfrak{P})\mathfrak{Q} = \mathfrak{A}'\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{P}(\mathfrak{Q}\mathfrak{B}\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}\mathfrak{B}'$ nicht existiert, die ja, da die Zeilen von $\mathfrak{P}$ und die Spalten von $\mathfrak{Q}$ aus $\Psi'$ sind, existieren müssen. Wenn dagegen beide Folgen beschränkt sind, kann $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}$ nicht gleich $\mathfrak{E}$ sein.

Ad 1). Wir wählen eine Teilfolge $\mathfrak{s}_{\beta_1}, \mathfrak{s}_{\beta_2}, \ldots$ der Spalten $\mathfrak{s}_{\alpha_1}, \mathfrak{s}_{\alpha_2}, \ldots$ so aus, daß die (negative) Länge $l_{\beta_{n+1}}$ kleiner ist als $l_{\beta_n}$. Wir bilden jetzt eine halbfinite Matrix $\mathfrak{A} = (a_{ik})$, $a_{ik} \neq 0$ nur für $i = 1$ und $k = l_{\beta_n}$. Ist $q_{\nu_1} \neq 0$ (ein solches gibt es sicher wegen $\mathfrak{P}\mathfrak{Q} = \mathfrak{E}$), so kann man offenbar die $a_{1l_{\beta_n}}$ so bestimmen, daß die Matrix $\mathfrak{A}' = \mathfrak{Q}\mathfrak{A}\mathfrak{P}$ in der $\nu$-ten Zeile an allen Stellen $(\nu, \beta_1) (\nu, \beta_2), \ldots$ beliebig vorgegebene Elemente $x_{\nu\beta_1}, x_{\nu\beta_2}, \ldots$ aufweist. Wir wählen dann eine Teilfolge $\mathfrak{z}_{\gamma_1}, \mathfrak{z}_{\gamma_2}, \ldots$ der Zeilen $\mathfrak{z}_{\beta_1}, \mathfrak{z}_{\beta_2}, \ldots$

so aus, daß $l'_{\gamma_{n+1}} > l'_{\gamma_n}$ ist, und bilden die Matrix $\mathfrak{B} = (b_{ik})$, $b_{ik} \neq 0$ nur für $k = 1$ und $i = l'_{\gamma_n}$. Ist $p_{1\sigma} \neq 0$, so kann man die Größen $b_{l'_{\gamma_n}}$ so bestimmen, daß die Matrix $\mathfrak{B}' = \mathfrak{Q}\mathfrak{B}\mathfrak{P}$ an den Stellen $(\gamma_1, \sigma)$, $(\gamma_2, \sigma)$, ... die beliebig vorgegebenen Elemente $y_{\gamma_1\sigma}, y_{\gamma_2\sigma}, \ldots$ besitzt. Bildet man jetzt das Element an der Stelle $(\nu, \sigma)$ von $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$, so divergiert diese Summe für z. B. $x_{\nu\gamma_k} = y_{\gamma_k\sigma} = 1$. Daher existiert $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ nicht.

Ad 2). Sind die Größen $l'_{\alpha_n}$ beschränkt und die $l_{\alpha_n}$ nicht, so zeigen wir, daß das Produkt $\mathfrak{A}'\mathfrak{Q} = (\mathfrak{Q}\mathfrak{A}\mathfrak{P})\mathfrak{Q}$ nicht existiert, wenn $\mathfrak{A}$ die eben konstruierte Matrix ist. Aus der Beschränktheit der $l'_{\alpha_n}$ folgt, daß $\mathfrak{Q}$ sicher eine Spalte, etwa die $t$-te enthält, deren Elemente an unendlich vielen der Stellen $(\beta_1, t)$, $(\beta_2, t)$, ... nicht verschwinden. Komponiert man jetzt die $\nu$-te Zeile von $\mathfrak{A}'$, die an den Stellen $(\nu, \beta_1)$, $(\nu, \beta_2)$, ... beliebig vorgegebene Elemente enthält, mit der $t$-ten Spalte von $\mathfrak{Q}$, so existiert das Element der Matrix $\mathfrak{A}'\mathfrak{Q}$ an der Stelle $(\nu, t)$ nicht.

Sind die Größen $l_{\alpha_n}$ beschränkt und die $l'_{\alpha_n}$ nicht, so zeigt man analog, daß das Produkt $\mathfrak{P}\mathfrak{B}'$ nicht existiert.

Ad 3). Sei jetzt $l'_{\alpha_n} \leqq u$, $l_{\alpha_n} \geqq v$ für alle $n$. Komponiert man dann die Zeilen $\mathfrak{z}_{\alpha_1}, \mathfrak{z}_{\alpha_2}, \ldots$ von $\mathfrak{Q}$ mit den Spalten $\mathfrak{s}_{\alpha_1}, \mathfrak{s}_{\alpha_2}, \ldots$ von $\mathfrak{P}$, so sind immer nur die Elemente von $\mathfrak{Q}$ rechts der $(v-1)$-ten Spalte beteiligt. Bezeichnen wir diese Zeilenabschnitte der $\mathfrak{z}_{\alpha i}$ mit $\mathfrak{a}_{\alpha_1}, \mathfrak{a}_{\alpha_2}, \ldots$, so sind bereits $u + |v| + 2$ solcher Abschnitte linear abhängig, also etwa $\mathfrak{a}_\varrho$ aus den $\mathfrak{a}_{\varrho_1}, \ldots, \mathfrak{a}_{\varrho_{u+|v|+1}}$ linear kombinierbar, d. h. es gibt Konstante $c_1, \ldots c_{u+|v|+1}$, die nicht sämtlich verschwinden und die Gleichung befriedigen

$$\mathfrak{a}_\varrho = c_1 \mathfrak{a}_{\varrho_1} + \cdots + c_{u+|v|+1} \mathfrak{a}_{\varrho_{u+|v|+1}}.$$

Bilden wir jetzt das Element an der Stelle $(\varrho, \varrho)$ von $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}$, multiplizieren wir also $\mathfrak{a}_\varrho$ mit $\mathfrak{s}_\varrho$, so wird

$$\mathfrak{a}_\varrho \mathfrak{s}_\varrho = c_1 \mathfrak{a}_{\varrho_1} \mathfrak{s}_\varrho + \cdots + c_{u+|v|+1} \mathfrak{a}_{\varrho_{u+|v|+1}} \mathfrak{s}_\varrho = 0,$$

da ja z. B. $\mathfrak{a}_{\varrho_1} \mathfrak{s}_\varrho = \mathfrak{z}_{\varrho_1} \mathfrak{s}_\varrho = 0$ sein muß, wie aus $\mathfrak{Q}\mathfrak{P} = \mathfrak{E}$ folgt. Es wäre also nicht $\mathfrak{Q}\mathfrak{P} = \mathfrak{E}$. Damit ist Hilfssatz 1 bewiesen.

*Beweis von Hilfssatz* 2: Wir nehmen an, die $n$-te Spalte der Matrix $\mathfrak{Q}$ enthielte an unendlich vielen der Stellen $(\varrho_1, n)$, $(\varrho_2, n)$, ... etwa an den Stellen $(\alpha_1, n)$, $(\alpha_2, n)$, ..., von Null verschiedene Elemente. Wir konstruieren dann eine halbfinite Matrix $\mathfrak{A}$, so daß das Produkt $(\mathfrak{Q}\mathfrak{A}\mathfrak{P})\mathfrak{Q}$ nicht existiert, das aber, da die Spalten von $\mathfrak{Q}$ aus $\Psi'$ sind, existieren muß. Nach Hilfssatz 1 enthalten fast alle Spalten $\mathfrak{s}_{\alpha_1}, \mathfrak{s}_{\alpha_2}, \ldots$ von $\mathfrak{P}$ in der oberen Hälfte von Null verschiedene Elemente. Nun können nicht unendlich viele dieser Spalten eine beschränkte Länge haben. Dies beweist man wie Fall 3) von Hilfssatz 1, indem man zeigt, daß sonst $\mathfrak{Q}\mathfrak{P} \neq \mathfrak{E}$ wäre. Man kann daher eine Teilfolge $\mathfrak{s}_{\beta_1}, \mathfrak{s}_{\beta_2}, \ldots$ so auswählen, daß $l_{\beta_{n+1}} < l_{\beta_n}$ ist. Dann bilden wir die Matrix $\mathfrak{A} = (a_{ik})$, $a_{ik} \neq 0$ nur für $i = 1$ und $k = l_{\beta_n}$. Ist $q_{\nu 1} \neq 0$ (ein solches gibt es sicher wegen $\mathfrak{P}\mathfrak{Q} = \mathfrak{E}$), so kann man wie oben in Fall 1) die Größen $a_{1 l_{\beta_n}}$ so bestimmen, daß die Matrix $\mathfrak{A}' = \mathfrak{Q}\mathfrak{A}\mathfrak{P}$ in der $\nu$-ten Zeile an den Stellen $(\nu, \beta_1)$, $(\nu, \beta_2)$, ... beliebig vorgegebene Elemente aufweist. Komponiert man jetzt die $\nu$-te Zeile von $\mathfrak{A}'$ mit der $n$-ten Spalte von $\mathfrak{Q}$, so existiert das $(\nu, n)$-te Element der Matrix $\mathfrak{A}'\mathfrak{Q}$ für geeignetes $\mathfrak{A}'$ offenbar nicht. Die $n$-te Spalte von $\mathfrak{Q}$ kann also nur an endlich vielen der Stellen $(\varrho_1, n)$, $(\varrho_2, n)$, ... von Null verschiedene Elemente besitzen. Der Beweis des zweiten Teiles von Hilfssatz 2 verläuft analog.

Eingegangen 5. September 1933.

# Zur Auflösbarkeit der Gleichung $x^2 - Dy^2 = -1$.

Von *P. Epstein* in Frankfurt a. M.

Während die Fermatsche Gleichung $x^2 - Dy^2 = 1$ für jeden Wert der Diskriminante $D$ lösbar ist, ist dies bekanntlich bei der Gleichung $x^2 - Dy^2 = -1$ nicht der Fall. Zunächst muß $D$ als Teiler von $x^2 + 1$ eine Summe von zwei Quadraten sein, aber diese Bedingung reicht nicht hin, wie schon das Beispiel $D = 34$ zeigt. Eine notwendige und hinreichende Bedingung liefert die Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{D}$, nämlich: Die Gleichung ist dann und nur dann lösbar, wenn die primitive Periode des regulären Kettenbruchs für $\sqrt{D}$ eine ungerade Anzahl von Teilnennern besitzt.

Hiermit ist jedoch die Fragestellung nur verschoben. Es bleibt die Frage, welche Zahlen $D$ eine derartige Kettenbruchentwicklung liefern, und dieses Problem ist bis jetzt nicht allgemein gelöst. Einige spezielle Klassen von Zahlen, für die die Gleichung lösbar ist, haben Legendre, Dirichlet u. a. angegeben.

Im folgenden wird ein allgemeiner Satz bewiesen, durch den man alle zulässigen Diskriminanten aufstellen kann, und daraus ein einfaches, zur Zerfällbarkeit in zwei Quadrate hinzukommendes notwendiges Kriterium für die Lösbarkeit der Gleichung abgeleitet.

**1.** Bei jeder auflösbaren Gleichung $x^2 - Dy^2 = -1$ muß nicht nur $D$, sondern auch $y$ und $y^2$ eine Summe von zwei Quadraten sein. Setzt man also

$$y^2 = \alpha^2 + \gamma^2, \quad D = \beta^2 + \delta^2,$$

so wird

$$x^2 + 1 = (\alpha^2 + \gamma^2)(\beta^2 + \delta^2) = (\alpha\beta + \gamma\delta)^2 + (\alpha\delta - \beta\gamma)^2.$$

Diese Gleichung ist befriedigt, wenn $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ ist; dann wird $x = \alpha\beta + \gamma\delta$. Wir haben also den Satz:

Bestimmt man vier Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ so, daß

$$\alpha^2 + \gamma^2 \text{ ein Quadrat}$$

und

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1 \tag{1}$$

ist, so ist die Gleichung $x^2 - Dy^2 = -1$ lösbar für $D = \beta^2 + \delta^2$.

Verstehen wir unter $\beta, \delta$ ein bestimmtes Lösungspaar der Gleichung (1), so ist jedes andere Paar durch $\alpha m + \beta$, $\gamma m + \delta$ gegeben, und wir sehen:

*Die Gleichung $x^2 - Dy^2 = -1$ ist lösbar für alle Diskriminanten der Schar*

$$D = (\alpha m + \beta)^2 + (\gamma m + \delta)^2, \tag{2}$$

*wenn darin $\alpha^2 + \gamma^2$ ein Quadrat und $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ ist.*

**2.** Wir zeigen nun, daß dieser Satz den allgemeinen Ausdruck für *jede* zulässige Diskriminante liefert. Zu diesem Ende ziehen wir die Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{D}$ heran. Sie hat allgemein die Form

$$\sqrt{D} = (a, \overline{q_1, q_2, \ldots, q_n, q_n, \ldots, q_2, q_1, 2a}, \ldots). \tag{3}$$

Man wird alle möglichen zulässigen Diskriminanten erhalten, wenn man sich die Teilnenner $q_1, q_2, \ldots, q_n$ irgendwie gegeben denkt und $a$ so bestimmt, daß $D$ eine ganze Zahl wird. Das ist mit einer leichten Einschränkung bei der Wahl der Teilnenner $q_i$ immer möglich. Es seien $\frac{A_k}{B_k}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots, 2n)$ die Näherungsbrüche des symmetrischen Kettenbruchs

$$(q_1, q_2, \ldots, q_n, q_n, \ldots, q_2, q_1);$$

dann ist nach bekannten Sätzen:

$$\begin{gathered} A_{2n} = A_n^2 + A_{n-1}^2, \quad B_{2n-1} = B_n^2 + B_{n-1}^2, \\ A_{2n-1} = B_{2n} = A_n B_n + A_{n-1} B_{n-1}, \\ A_{2n} B_{2n-1} = B_{2n}^2 + 1. \end{gathered} \tag{4}$$

Aus

$$\sqrt{D} = (a, q_1, q_2, \ldots, q_1, a + \sqrt{D})$$

folgt

$$\sqrt{D} = a + \frac{(a + \sqrt{D}) B_{2n} + B_{2n-1}}{(a + \sqrt{D}) A_{2n} + A_{2n-1}} = a + \frac{(a + \sqrt{D}) B_{2n} + B_{2n-1}}{(a + \sqrt{D}) A_{2n} + B_{2n}}$$

und hieraus

$$D = a^2 + \frac{2a B_{2n} + B_{2n-1}}{A_{2n}}. \tag{5}$$

Es ist also $a$ so zu bestimmen, daß

$$\frac{2a B_{2n} + B_{2n-1}}{A_{2n}} = b \tag{6}$$

eine ganze Zahl wird. Ist nun

1) $B_{2n-1} = B_n^2 + B_{n-1}^2$ gerade, so muß $A_{2n} = A_n^2 + A_{n-1}^2$ ungerade sein, sonst wäre nach der letzten Gleichung (4): $B_{2n}^2 \equiv -1 \bmod 4$.

2) Ist $B_{2n-1}$ ungerade, so muß nach (6) ebenfalls $A_{2n}$ ungerade sein. Nach der letzten Gleichung (4) ist dann $B_{2n}$ gerade. Es folgt somit:

Damit der Kettenbruch (3) die Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl darstellt, muß jedenfalls $A_{2n} = A_n^2 + A_{n-1}^2$ *ungerade* sein. Dann ist immer $B_{2n} B_{2n-1}$ gerade. Von den Zahlen $A_n$, $A_{n-1}$ muß also eine gerade, die andere ungerade sein. Das ist aber immer erreichbar, denn wenn es bei vorgegebenen $q_i$ bei dem Kettenbruch

$$\frac{A_n}{B_n} = (q_1, q_2, \ldots, q_n) \tag{7}$$

mit $q_n > 1$ nicht der Fall ist, so braucht man nur den Teilnenner $q_n$ durch die zwei Teilnenner $(q_n - 1, 1)$ zu ersetzen.

Nunmehr lassen sich die ganzzahligen Werte von $a$ und $b$, welche die Gleichung (6) befriedigen, mit Benutzung der letzten Gleichung (4) leicht angeben. Sie sind

$$\begin{aligned} a &= \tfrac{1}{2} B_{2n} B_{2n-1} + m A_{2n}, \\ b &= \quad B_{2n-1}^2 + 2m B_{2n}, \end{aligned} \tag{8}$$

worin $m$ jede ganze Zahl bedeutet. Hiermit wird also

$$D = (mA_{2n} + \tfrac{1}{2}B_{2n}B_{2n-1})^2 + 2mB_{2n} + B_{2n-1}^2.$$

Die Diskriminante dieser quadratischen Funktion von $m$ ist $-4$, mithin ist $D$ als eine *Summe von zwei Quadraten* darstellbar. Man findet:

$$D = (\alpha m + \beta)^2 + (\gamma m + \delta)^2,$$

worin

$$\alpha = A_n^2 - A_{n-1}^2, \quad \gamma = 2A_nA_{n-1},$$
$$\beta = \tfrac{1}{2}(B_n^2 - B_{n-1}^2)B_{2n} + 2(-1)^n B_nB_{n-1},$$
$$\delta = B_nB_{n-1}B_{2n} - (-1)^n(B_n^2 - B_{n-1}^2)$$

und

$$\alpha\delta - \beta\gamma = (-1)^n$$

ist. Unter den gemachten Voraussetzungen ($A_n$ und $A_{n-1}$ teilerfremd und eins von ihnen gerade) sind $\alpha$ und $\gamma$ immer teilerfremd, und es ist

$$\alpha^2 + \gamma^2 = (A_n^2 + A_{n-1}^2)^2 = A_{2n}^2.$$

Damit ist unser Satz bewiesen, der nunmehr in folgender Form ausgesprochen werden kann:

*Um die Werte von $D$ zu finden, für welche die Gleichung $x^2 - Dy^2 = -1$ lösbar ist, nehme man zwei teilerfremde positive Zahlen $u > v$ an, von denen eine gerade ist, bestimme die Zahlen*

$$\alpha = u^2 - v^2, \quad \gamma = 2uv$$

*und mit ihnen $\beta$ und $\delta$ als Lösungen von*

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \varepsilon = \pm 1.$$

*Dann gehört zu jedem Paar $\beta$, $\delta$ eine zulässige Diskriminante*

$$D = \beta^2 + \delta^2,$$

*und es sind*

$$x = \alpha\beta + \gamma\delta, \quad y = u^2 + v^2$$

*Lösungen der Gleichung $x^2 - Dy^2 = -1$.*

**3.** Von jeder so bestimmten Diskriminante $D$ kann man auch sogleich den Kettenbruch für $\sqrt{D}$ angeben. Wir nennen $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ den erzeugenden Kettenbruch von $\sqrt{D}$. Dann ist die Kettenbruchentwicklung von $\frac{u}{v} = \frac{A_n}{A_{n-1}}$ der umgekehrte erzeugende Kettenbruch $\frac{u}{v} = (q_n, q_{n-1}, \ldots, q_1)$, und mit ihm kann man dann sofort die Entwicklung von $\sqrt{D}$ hinschreiben.

Zu je zwei Zahlen $u, v$ erhält man zwei Scharen von Diskriminanten, je nachdem man $\beta$ und $\delta$ als Lösungen der Gleichung $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$ oder $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$ bestimmt. Dies hängt damit zusammen, daß man den Kettenbruch für $\frac{u}{v}$ entweder in der Form

$$\frac{u}{v} = (q_n, q_{n-1}, \ldots, q_1) \text{ mit } q_1 > 1$$

oder in der Form

$$\frac{u}{v} = (q_n, q_{n-1}, \ldots, q_1 - 1, 1)$$

ansetzen kann.

Beispiel. $u = 3$, $v = 2$, also $\alpha = 5$, $\gamma = 12$.

1) $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$

$$\beta = 2 + 5m, \quad \delta = 5 + 12m$$
$$D = (5m + 2)^2 + (12m + 5)^2$$

$\frac{u}{v} = (1, 2)$ $\quad m = 0 \quad \sqrt{29} = (5, 2, 1, 1, 2, 10, \ldots)$

$m = 1 \quad \sqrt{338} = (18, 2, 1, 1, 2, 36, \ldots)$

$m = 2 \quad \sqrt{985} = (31, 2, 1, 1, 2, 62, \ldots)$

2) $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$

$$\beta = 3 + 5m, \quad \delta = 7 + 12m$$
$$D = (5m + 3)^2 + (12m + 7)^2$$

$\frac{u}{v} = (1, 1, 1)$ $\quad m = 0 \quad \sqrt{58} = (7, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 14, \ldots)$

$m = 1 \quad \sqrt{425} = (20, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 40, \ldots)$.

Für alle diese Diskriminanten hat die Gleichung $x^2 - Dy^2 = -1$ dieselbe Lösung $y = u^2 + v^2 = 13$.

**4.** Jede mögliche Diskriminante gehört nicht nur zu *einer* Schar von Diskriminanten, sondern sie kommt in unendlich vielen Scharen vor. Man kann nämlich den erzeugenden Kettenbruch bis in die Mitte von irgendeiner Periode ausdehnen und erhält jedesmal eine neue Schar. So gehört z. B. die Diskriminante 5 den folgenden Scharen an:

| | |
|---|---|
| $(m + 2)^2 + 1$ | $y = 1$ |
| $(15m + 2)^2 + (8m + 1)^2$ | $y = 17$ |
| $(273m + 2)^2 + (136m + 1)^2$ | $y = 305$ |

usf.

Jede Darstellungsform der Diskriminante liefert ein Lösungspaar der Gleichung, und so erhält man die Gesamtheit der Lösungen.

**5.** Wir haben gesehen, wie jede Lösung der Gleichung $x^2 - Dy^2 = -1$ mit der Zerlegung von $D$ in zwei Quadrate zusammenhängt, nämlich: Ist $D = \beta^2 + \delta^2$ eine zulässige Diskriminante, so gehören zu jeder Lösung $x, y$ zwei *pythagoreische Zahlen* $\alpha, \gamma$ so, daß $\alpha\delta - \beta\gamma = \varepsilon = \pm 1$ und $x = \alpha\beta + \gamma\delta$, $y^2 = \alpha^2 + \gamma^2$ ist. Wir brauchen nur positive Werte für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in Betracht zu ziehen und sagen:

*Die Lösung $x, y$ gehört durch $(\alpha, \gamma)$ zu der Zerlegung $(\beta, \delta)$ von $D$.*

Das hat natürlich nur Bedeutung, wenn sich $D$ auf verschiedene Arten in zwei Quadrate zerlegen läßt, also wenn $D$ nicht Potenz einer Primzahl der Form $4k + 1$ oder das Doppelte einer solchen Potenz ist. Dann aber besteht der Satz:

Für jede zulässige Diskriminante gibt es nur *eine* bestimmte Zerlegung $D = \beta^2 + \delta^2$, zu der sämtliche Lösungen der Gleichung $x^2 - Dy^2 = -1$ gehören. Diese Zerlegung nennen wir die Hauptzerlegung von $D$.

Zum Beweis dieses Satzes zeigen wir:

1) Eine Lösung $x, y$ gehört zu einer bestimmten Zerlegung von $D$.

Würde nämlich $x, y$ durch $(\alpha, \gamma)$ zu der Zerlegung $(\beta, \delta)$ und durch $(\alpha', \gamma')$ zu einer anderen Zerlegung $(\beta', \delta')$ von $D$ gehören, so wäre

$$x = \alpha\beta + \gamma\delta = \alpha'\beta' + \gamma'\delta',$$
$$\alpha\delta - \beta\gamma = \varepsilon, \ \alpha'\delta' - \beta'\gamma' = \varepsilon',$$
$$D = \beta^2 + \delta^2 = \beta'^2 + \delta'^2.$$

Man findet daraus:

$$D\alpha = \beta x + \delta\varepsilon, \quad D\alpha' = \beta' x + \delta'\varepsilon'$$
$$D\gamma = \delta x - \beta\varepsilon, \quad D\gamma' = \delta' x - \beta'\varepsilon'$$

und weiter

$$(9) \qquad \begin{aligned} D(\alpha\beta' - \beta\alpha') &= \varepsilon\delta\beta' - \varepsilon'\beta\delta' = \varepsilon(\delta\beta' - \varepsilon\varepsilon'\beta\delta') \\ D(\gamma\delta' - \delta\gamma') &= \varepsilon'\delta\beta' - \varepsilon\beta\delta' = \varepsilon'(\delta\beta' - \varepsilon\varepsilon'\beta\delta'). \end{aligned}$$

Nun ist

$$D^2 = (\beta^2 + \delta^2)(\beta'^2 + \delta'^2) = (\beta\beta' + \varepsilon\varepsilon'\delta\delta')^2 + (\delta\beta' - \varepsilon\varepsilon'\beta\delta')^2.$$

Aus (9) folgt, daß $\delta\beta' - \varepsilon\varepsilon'\beta\delta'$ durch $D$ teilbar, aber aus der letzten Gleichung, daß es absolut $\leqq D$ ist, also ist entweder $\delta\beta' - \varepsilon\varepsilon'\beta\delta' = 0$ oder $\delta\beta' - \varepsilon\varepsilon'\beta\delta' = \pm D$. Aus $\delta\beta' = \varepsilon\varepsilon'\beta\delta'$ folgt aber, da $(\beta, \delta) = 1$ und $(\beta', \delta') = 1$ ist, $\beta = \beta'$, $\delta = \delta'$. Ist aber $\delta\beta' - \varepsilon\varepsilon'\beta\delta' = \pm D$, so muß nach der letzten Gleichung $\beta\beta' = -\varepsilon\varepsilon'\delta\delta'$, also $\beta = \delta'$, $\delta = \beta'$ sein. In beiden Fällen ergibt sich dieselbe Zerlegung von $D$.

2) Zwei verschiedene Lösungen gehören zu derselben Zerlegung von $D$.

Sei nämlich $x_0, y_0$ die kleinste positive Lösung und sie gehöre durch $(\alpha, \gamma)$ zu der Zerlegung $(\beta, \delta)$ von $D$. Aus ihr erhält man alle Lösungen durch

$$x_k + \sqrt{D}\, y_k = (x_0 + \sqrt{D}\, y_0)^{2k+1}.$$

Es ist daher

$$\begin{aligned} x_k + \sqrt{D}\, y_k &= (x_{k-1} + \sqrt{D}\, y_{k-1})(x_0^2 + D y_0^2 + 2\sqrt{D}\, x_0 y_0) \\ &= (x_{k-1} + \sqrt{D}\, y_{k-1})(2D y_0^2 - 1 + 2\sqrt{D}\, x_0 y_0), \end{aligned}$$

mithin

$$x_k = x_{k-1}(2D y_0^2 - 1) + 2D x_0 y_0 y_{k-1},$$

also ist

$$x_k + x_{k-1} \equiv 0 \bmod D$$

und damit

$$x_0 \equiv -x_1 \equiv x_2 \equiv -x_3 \equiv \cdots \equiv (-1)^k x_k \bmod D.$$

Wir können also schreiben

$$\begin{aligned} x_k &= \eta x_0 + nD \qquad (\eta = \pm 1) \\ &= \eta(\alpha\beta + \gamma\delta) + n(\beta^2 + \delta^2) \\ &= (\eta\alpha + n\beta)\beta + (\eta\gamma + n\delta)\delta \end{aligned}$$

oder

$$(10) \qquad x_k = \alpha_k\beta + \gamma_k\delta$$

mit

$$\alpha_k = \eta\alpha + n\beta, \quad \gamma_k = \eta\gamma + n\delta$$

und

$$(11) \qquad \alpha_k\delta - \gamma_k\beta = \eta(\alpha\delta - \beta\gamma) = \eta\varepsilon = \pm 1.$$

Dann wird

$$\begin{aligned}\alpha_k^2 + \gamma_k^2 &= \alpha^2 + \gamma^2 + 2\eta n(\alpha\beta + \gamma\delta) + n^2(\beta^2 + \delta^2)\\ &= y_0^2 + 2\eta n x_0 + n^2 D,\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}D(\alpha_k^2 + \gamma_k^2) &= 1 + x_0^2 + 2\eta n x_0 D + n^2 D^2\\ &= 1 + (\eta x_0 + nD)^2 = 1 + x_k^2 = D y_k^2,\end{aligned}$$

d. h.

$$\alpha_k^2 + \gamma_k^2 = y_k^2. \tag{12}$$

Aus (10), (11), (12) ist ersichtlich, daß in der Tat die Lösung $x_k$, $y_k$ durch $(\alpha_k, \gamma_k)$ zur gleichen Zerlegung $(\beta, \delta)$ gehört wie die Lösung $x_0$, $y_0$.

Damit ist gezeigt, daß für jede zulässige Diskriminante nur *eine* Zerlegung $D = \beta^2 + \delta^2$ für die Lösung der Gleichung $x^2 - Dy^2 = -1$ in Betracht kommt, und wenn wir, entsprechend den früheren Entwicklungen, unter $\alpha$ immer die ungerade der beiden Zahlen $\alpha, \gamma$ verstehen, so ist immer $\delta$ *ungerade.*

**6.** Es erhebt sich die Frage, wie man (ohne Kettenbruchentwicklung für $\sqrt{D}$) einer Zerlegung von $D$ ansehen kann, ob sie eine Hauptzerlegung ist. Darüber möge folgendes gesagt werden. Bei einer Hauptzerlegung lassen sich die zugehörigen Zahlen $(\alpha, \gamma)$ durch $\alpha = u^2 - v^2$, $\gamma = 2uv$ ausdrücken, also ist

$$\delta u^2 - 2\beta uv - \delta v^2 = \varepsilon,$$

somit

$$\varepsilon\delta = (\delta u - \beta v)^2 - Dv^2$$

und

$$-\varepsilon\delta = (\delta v + \beta u)^2 - Du^2.$$

Hieraus sieht man zunächst:

*Für jede zulässige Diskriminante mit der Hauptzerlegung* $D = \beta^2 + \delta^2$ *sind außer der Gleichung* $x^2 - Dy^2 = -1$ *auch die Gleichungen* $x^2 - Dy^2 = \delta$ *und* $x^2 - Dy^2 = -\delta$ *lösbar.*

**7.** Weiter aber schließt man aus den obigen Gleichungen:

*Für jede zulässige Diskriminante mit der Hauptzerlegung* $(\beta, \delta)$ *muß* $\delta$ *quadratischer Rest von* $D$ *sein.*

Es ist also jedenfalls die Gleichung $x^2 - Dy^2 = -1$ *nicht lösbar*, wenn bei allen primitiven Zerlegungen von $D$ die ungeraden Bestandteile *quadratische Nichtreste* von $D$ sind.

Beispiel. $D = 205 = 14^2 + 3^2 = 6^2 + 13^2$. Die Zahlen 3 und 13 sind Nichtreste von 5, also auch von 205, mithin ist $x^2 - Dy^2 = -1$ nicht lösbar.

Diese Bedingung für die Nichtlösbarkeit der Gleichung ist hinreichend, aber nicht notwendig. Es gibt Diskriminanten $D$, für die bei jeder Zerlegung die ungeraden Bestandteile quadratische Reste von $D$ sind und doch die Gleichung $x^2 - Dy^2 = -1$ nicht lösbar ist.

Beispiel. $D = 689 = 13 \cdot 53 = 8^2 + 25^2 = 20^2 + 17^2$. Die Zahlen 17 und 25 sind quadratische Reste von $D$, aber $x^2 - Dy^2 = -1$ ist nicht lösbar.

**8.** Auf Grund der letzten Bedingung können wir den folgenden Satz beweisen:

*Die Gleichung* $x^2 - Dy^2 = -1$ *ist nicht lösbar für alle Diskriminanten* $D = 2p$, *wenn* $p$ *eine Primzahl der Form* $8k + 1$ *und in der Zerlegung* $2p = A^2 + B^2$ *die eine Zahl* $A$ *(und damit auch* $B$*)* $\equiv \pm 3 \bmod 8$ *ist.*

*Beweis.* Sei $p = a^2 + b^2$, $a$ die ungerade, $b$ die gerade Basis, so ist $A = a + b$, $B = a - b$. Wir zeigen, daß bei den genannten Diskriminanten stets $A$ *quadratischer Nichtrest von* $p$, also auch von $D$ ist. Zu diesem Zweck ziehen wir die von Gauß[1]) aufgestellten Kongruenzen für die Zahlen $a$ und $b$ heran. Wir setzen

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \frac{p-1}{2} = P, \qquad 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \frac{p-1}{4} = Q.$$

Dann ist

$$2aQ^2 \equiv (-1)^{\frac{p+3}{4}} P, \qquad \pm 2bQ^2 \equiv (-1)^{\frac{p-1}{4}} \bmod p,$$

also in unserem Fall ($p = 8k + 1$)

$$2aQ^2 \equiv -P, \qquad \pm 2bQ^2 \equiv 1,$$

mithin

$$2AQ^2 \equiv \mp (1 \pm P) \bmod p.$$

Nun ist $P^2 \equiv -1$, also $P \equiv \pm i$, also

$$2AQ^2 \equiv \mp (1 \pm i) \bmod p.$$

Hieraus folgt, da $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1$, $Q^{p-1} \equiv 1$, $(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1$ ist,

$$A^{\frac{p-1}{2}} \equiv (1 \pm i)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (\pm 2i)^{\frac{p-1}{4}}$$

oder

$$A^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{8}} 2^{\frac{p-1}{4}} \bmod p. \tag{13}$$

Es ist also der quadratische Restcharakter von $A$ zurückgeführt auf den *biquadratischen Restcharakter von* 2. Für diesen gilt aber nach Gauß:

$2^{\frac{p-1}{4}} \equiv \quad 1$ für die Primzahlen $p = a^2 + b^2$ mit $b \equiv 0 \bmod 8$,

$2^{\frac{p-1}{4}} \equiv -1$ für die Primzahlen $p = a^2 + b^2$ mit $b \equiv 4 \bmod 8$.

Hiermit erhält man

1) für $p = 16m + 1$, $(-1)^{\frac{p-1}{8}} = 1$, wenn $b \equiv 4 \bmod 8$ ist:

$$A^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \bmod p,$$

2) für $p = 16m + 9$, $(-1)^{\frac{p-1}{8}} = -1$, wenn $b \equiv 0 \bmod 8$ ist:

$$A^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \bmod p.$$

In beiden Fällen ist also immer $A$ quadratischer Nichtrest, also die Gleichung $x^2 - Dy^2 = -1$ nicht lösbar.

Die Bedingungen unter 1) und 2) sind aber gleichbedeutend mit der im Satz ausgesprochenen Bedingung $A \equiv \pm 3 \bmod 8$, denn

für $p = 16m + 1$ ist $a \equiv \pm 1 \bmod 8$,

für $p = 16m + 9$ ist $a \equiv \pm 3 \bmod 8$.

**9.** Die hier betrachteten Primzahlen lassen sich noch in anderer Weise einfach charakterisieren. Da sie $\equiv 1 \bmod 8$ sind, sind sie durch die Form $x^2 + 2y^2$ mit geradem $y$,

[1]) Theoria residuorum biquadraticorum, Commentatio prima = Werke II, S. 65—92.

also in der Form $c^2 + 8d^2$ darstellbar, und nun besteht der Satz, daß *immer und nur für die oben betrachteten Primzahlen d ungerade ist.*

*Beweis.* Sei also die Primzahl

$$p = a^2 + b^2 = c^2 + 8d^2,$$

so ist immer $b^2 \equiv 0 \bmod 8$, also $b$ durch 4 teilbar. Wir setzen $b = 4b_0$, dann ist

$$a^2 - c^2 = 8(d^2 - 2b_0^2).$$

Ist $k$ der größte gemeinsame Teiler von $b_0$ und $d$ und sei

$$b_0 = kb_1, \quad d = kd_1,$$

so ist also

$$a^2 - c^2 = 8k^2(d_1^2 - 2b_1^2). \tag{14}$$

Sei $2^n$ die höchste in $k$ enthaltene Potenz von 2, also

$$k = 2^n k_1 \text{ und } k_1 \text{ ungerade},$$

so muß von den Faktoren $a + c$ und $a - c$ der linken Seite von (14) einer durch $k_1$ teilbar, der andere zu $k_1$ relativ prim sein, weil sonst $a$ und $b$ gemeinsame Teiler hätten. Beide Faktoren sind gerade, aber einer von ihnen kann nur durch 2, nicht durch 4 teilbar sein, sonst würde $a$ eine gerade Zahl sein. Mithin kann man bei geeigneter Wahl des Vorzeichens von $c$ ansetzen:

$$\begin{aligned} &\text{entweder} && a + c = 2f, && a - c = 2^{2n+2}k_1^2 g \\ &\text{oder} && a + c = 2k_1^2 f, && a - c = 2^{2n+2} g, \end{aligned}$$

und hierin ist $f$ ungerade.

$f$ und $g$ sind Teiler der Form $d_1^2 - 2b_1^2$ mit den relativ primen Zahlen $b_1$ und $d_1$, also nach einem bekannten Satz von Lagrange wieder von der Form $x^2 - 2y^2$. Wir setzen daher:

$$\begin{aligned} a + c &= 2(q^2 - 2r^2), && a - c = 2^{2n+2}k_1^2(s^2 - 2t^2) \\ \text{bzw. } a + c &= 2k_1^2(q^2 - 2r^2), && a - c = 2^{2n+2}(s^2 - 2t^2), \end{aligned} \tag{15}$$

und hier muß also $q$ *ungerade* sein.

Ist jetzt

1) $n > 0$, also $k$ und $d$ *gerade* und $b = 4kb_0 \equiv 0 \bmod 8$, so ist nach (15):

$$\begin{aligned} a &= q^2 - 2r^2 + 2^{2n+1}k_1^2(s^2 - 2t^2) \\ \text{bzw. } a &= k_1^2(q^2 - 2r^2) + 2^{2n+1}(s^2 - 2t^2). \end{aligned} \tag{16}$$

Beidesmal ist $a \equiv 1 - 2r^2 \bmod 8$, also

$$a + b \equiv 1 - 2r^2 \equiv \begin{cases} +1 \bmod 8, & \text{wenn } r \text{ gerade} \\ -1 \bmod 8, & \text{wenn } r \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Wir sehen, daß für unsere Primzahlen, bei denen $a + b \equiv \pm 3 \bmod 8$ ist, dieser Fall ($b \equiv 0 \bmod 8$ und $d$ gerade) ausscheidet.

Ist aber

2) $n = 0$, also $k$ *ungerade* und $k_1 = k$, so folgt jetzt aus (16):

$$a \equiv 1 - 2r^2 + 2s^2 - 4t^2 \bmod 8. \tag{17}$$

Nun war

$$\begin{aligned} d_1^2 - 2b_1^2 &= (q^2 - 2r^2)(s^2 - 2t^2) \\ &= (qs + 2rt)^2 - 2(qt + rs)^2, \end{aligned}$$

also, da $q$ ungerade ist,

$$d_1^2 - 2b_1^2 \equiv s^2 - 2(t + rs)^2 \bmod 4,$$

mithin

(18) $$d_1 \equiv s \bmod 2, \quad b_1 \equiv t + rs \bmod 2.$$

Es sind zwei Fälle möglich:

$\alpha$) $d_1$ *gerade*, also $s$ gerade. Dann ist $b_1$ ungerade und $b = 4kb_1 \equiv 4 \bmod 8$. Dann ist nach (18) $t$ ungerade und nach (17) $a \equiv -3 - 2r^2 \bmod 8$, also $a + b \equiv 1 - 2r^2 \bmod 8$. Das ist dieselbe Kongruenz wie vorhin, und auch dieser Fall scheidet für unsere Primzahlen aus.

$\beta$) $d_1$ *ungerade*, also $d$ *ungerade*. Dann ist $s$ ungerade und nach (18) $b_1 \equiv r + t \bmod 2$, also

$$b = 4kb_1 \equiv 4r + 4t \bmod 8.$$

Nach (17) wird $a \equiv 3 - 2r^2 - 4t^2 \bmod 8$, also

$$\begin{aligned} a + b &\equiv 3 - 2r(r-2) - 4t(t-1) \\ &\equiv 3 - 2r(r-2) \bmod 8, \quad \text{folglich} \end{aligned}$$

für gerade $r$: $\quad a + b \equiv 3 \bmod 8$

für ungerade $r$: $\quad a + b \equiv -3 \bmod 8$.

Wir erhalten also in der Tat nur in diesem einen Fall, wenn $d$ *ungerade* ist, die Primzahlen der oben betrachteten Art mit $a + b \equiv \pm 3 \bmod 8$, und der Satz ist damit bewiesen.

Hiernach können wir den Satz in **8** über unsere Gleichung in der Form aussprechen:

I. *Die Gleichung* $x^2 - Dy^2 = -1$ *ist nicht lösbar für jede Diskriminante* $D = 2p$, *wenn* $p$ *eine Primzahl der Form* $c^2 + 8d^2$ *mit ungeradem* $d$ *ist.*

In dieser Fassung hat vor mehr als 20 Jahren Herr Brandt, damals Student in Straßburg, den Satz auf Grund einer großen Anzahl von Beispielen als Vermutung ausgesprochen. Ein Beweis konnte damals nicht geführt werden.

**10.** Für dieselben Primzahlen $p$ gilt aber der weitere Satz:

II. *Die Gleichung* $x^2 - Dy^2 = -1$ *ist nicht lösbar für jede Diskriminante* $D = 2p^2$.

Der Beweis ist sogar einfacher als der des vorigen Satzes, da er nicht von den Gaußschen Kongruenzen für die Basen $a$ und $b$ Gebrauch macht. Sei also wie bisher

$$p = a^2 + b^2 \text{ und } a \pm b \equiv \pm 3 \bmod 8.$$

Dann ist $p^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$ und

$$\begin{aligned} D = 2p^2 &= (a^2 - b^2 + 2ab)^2 + (a^2 - b^2 - 2ab)^2 \\ &= M^2 + N^2. \end{aligned}$$

Nun ist $b^2 \equiv -a^2 \bmod p$, also $b \equiv \pm ia \bmod p$. Damit wird

$$M \equiv 2a^2(1 \pm i) \bmod p$$

$$M^{\frac{p-1}{2}} \equiv 2^{\frac{p-1}{2}} a^{p-1}(1 \pm i)^{\frac{p-1}{2}}.$$

Aber es ist $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1$, $a^{p-1} \equiv 1$, daher

$$M^{\frac{p-1}{2}} \equiv (1 \pm i)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (\pm 2i)^{\frac{p-1}{4}} \quad \text{oder}$$

$$M^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{8}} 2^{\frac{p-1}{4}} \bmod p.$$

Die gleiche Kongruenz gilt für $N^{\frac{p-1}{2}}$, und sie ist dieselbe, wie die oben für $A^{\frac{p-1}{2}}$ gefundene. Daher gelten auch dieselben Folgerungen, d. h. die Gleichung ist in der Tat für die Diskriminante $D = 2p^2$ nicht lösbar.

**11.** Hieraus folgt aber nun unmittelbar:

III. Ist $p = a^2 + b^2 = c^2 + 8d^2$ eine Primzahl der bisher betrachteten Art, also *d ungerade, so ist die Gleichung* $x^2 - Dy^2 = -1$ *nicht lösbar für alle Diskriminanten* $D = 2p^n$.

Ist nämlich

1) $n$ ungerade $= 2m - 1$, so ist

$$x^2 - Dy^2 = x^2 - 2p(p^{m-1}y)^2 = -1$$

nicht lösbar nach Satz I.

2) $n$ gerade $= 2m$, so ist

$$x^2 - Dy^2 = x^2 - 2p^2(p^{m-1}y)^2 = -1$$

nicht lösbar nach Satz II.

**12.** Wir geben zum Schluß ein Verzeichnis der hier in Betracht kommenden Primzahlen bis $p = 1009$ und ihrer Zerlegung in $a^2 + b^2$ und $c^2 + 8d^2$.

$$\begin{aligned}
17 &= 1^2 + 4^2 = 3^2 + 8\cdot 1^2 & 449 &= 7^2 + 20^2 = 21^2 + 8\cdot 1^2\\
73 &= 3^2 + 8^2 = 1^2 + 8\cdot 3^2 & 601 &= 5^2 + 24^2 = 23^2 + 8\cdot 3^2\\
89 &= 5^2 + 8^2 = 9^2 + 8\cdot 1^2 & 617 &= 19^2 + 16^2 = 15^2 + 8\cdot 7^2\\
97 &= 9^2 + 4^2 = 5^2 + 8\cdot 3^2 & 641 &= 25^2 + 4^2 = 21^2 + 8\cdot 5^2\\
193 &= 7^2 + 12^2 = 11^2 + 8\cdot 3^2 & 673 &= 23^2 + 12^2 = 5^2 + 8\cdot 9^2\\
233 &= 13^2 + 8^2 = 15^2 + 8\cdot 1^2 & 769 &= 25^2 + 12^2 = 11^2 + 8\cdot 9^2\\
241 &= 15^2 + 4^2 = 13^2 + 8\cdot 3^2 & 929 &= 23^2 + 20^2 = 27^2 + 8\cdot 5^2\\
281 &= 5^2 + 16^2 = 9^2 + 8\cdot 5^2 & 937 &= 19^2 + 24^2 = 17^2 + 8\cdot 9^2\\
401 &= 1^2 + 20^2 = 3^2 + 8\cdot 7^2 & 977 &= 31^2 + 4^2 = 3^2 + 8\cdot 11^2\\
433 &= 17^2 + 12^2 = 19^2 + 8\cdot 3^2 & 1009 &= 15^2 + 28^2 = 19^2 + 8\cdot 9^2.
\end{aligned}$$

Frankfurt a. M., 30. September 1933.

Eingegangen 13. Dezember 1933.

Soeben erschien:

# Deutsche Geschichte

**Erster Band:**

**Urzeit, Bauerntum und Aristokratie bis um 1100**

**Von Johannes Bühler**

Groß-Oktav. VIII, 413 Seiten. Mit 16 Tafeln und 4 Karten.
Gebunden RM 7.20.

Schicksale und Leistungen des deutschen Volkes sind Kern und Stern dieses Geschichtswerkes, sie bestimmen seinen Inhalt und sein Ethos. Für seine Anlage war das Bestreben maßgebend, das Leben der Vergangenheit dem Leben der Gegenwart und Zukunft dienstbar zu machen. Die Darstellung ist keineswegs lehrhaft, sondern trägt lebendiges künstlerisches Gepräge; die für das Verständnis wissenschaftlicher Einzelfragen notwendigen Anmerkungen sind in einem Anhang zusammengefaßt. Der vorliegende erste Band ist einer ausführlichen Schilderung der Ursprünge des deutschen Volkes, der Kultur des bäuerlich-aristokratischen Zeitalters und der Entstehung und Entwicklung des universalen Kaisertums bis um 1100 gewidmet. Er verdient besonderes Interesse, da der Verfasser der Behandlung der heute im Brennpunkt des Meinungsstreites stehenden Fragen nicht ausweicht.

Ausführlicher Prospekt auf Wunsch kostenlos

**Walter de Gruyter & Co., Berlin W 10**
Genthiner Straße 38